حمل الآن

مجانا وحصريا

المراجعة رقم (1)

اختبار شهر اكتوبر







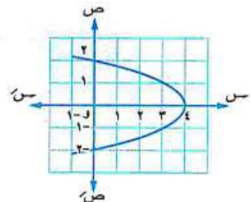
اختبار 1 على درس 1 من الوحدة الأولى

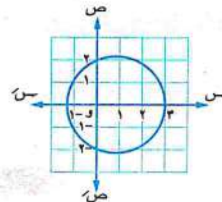
أجب عن الأسئلة الآتية :

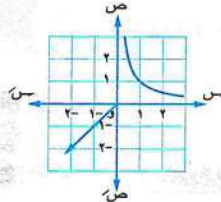
السؤال الأول **٤ درجات** كل جزئية درجة

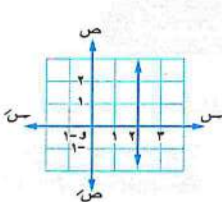
اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) أى من الأشكال الآتية يمثل دالة فى س ؟


(أ)


(ب)


(جـ)


(د)

(٢) الشكل المقابل يمثل دالة فى س

مجالها ....

(أ) ح (ب) ح -]-٢ ، ٢[

(جـ) ح - [-٢ ، ٢] (د) ح - {٠}

(٣) الشكل المقابل يمثل دالة فى س مداها ....

(أ) ح - [٠ ، ٢] (ب) ح - {٠}

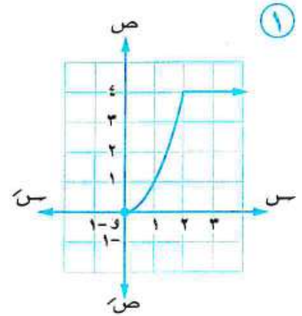
(جـ) ح -]٢ ، ٠] (د) ح -]٢ ، ٠[

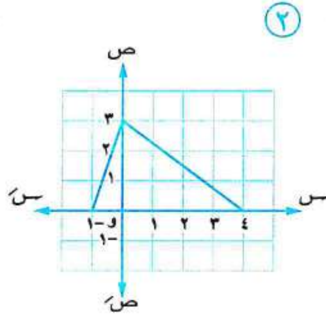
(٤) إذا كانت : د (س) = $\sqrt{٤ - س^{٢}}$ فإن : مجال د = ...

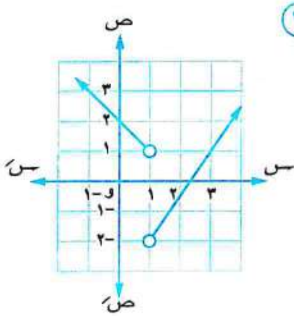
(أ) [-٢ ، ٢] (ب)]-٢ ، ٢[(جـ) [-٢ ، ٢[(د)]-٢ ، ٢]

السؤال الثانى **٦ درجات** كل جزئية درجتان

ابحث اطراد كل من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية :









اختبار 2 حتى درس 2 من الوحدة الأولى

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول **٦ درجات** كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١) إذا كانت : د (س) = $\frac{١}{س}$ ، ر (س) = $\sqrt{س}$ فإن : (د . ر) (س) = ...

(أ) $\sqrt{س} + \frac{١}{س}$ (ب) $\sqrt{س}$ (جـ) $\frac{١}{\sqrt{س}}$ (د) $\sqrt{س} - \frac{١}{س}$

٢) إذا كانت : د (س) = س + ١ ، ر (س) = $س^٢$ فإن : (د ∘ ر) (٢) = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٩

٣) مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt{٥ - س}$ يساوى ....

(أ) ح − {٥} (ب) $ح^+$ (جـ)]−∞ ، ٥] (د) [٥ ، ∞[

٤) إذا كانت : د (س) = $\sqrt{س}$ ، ر (س) = $س^٢$ فإن : مجال (د ÷ ر) = ...

(أ)]٠ ، ∞[(ب) ح − {٠} (جـ) $ح^+$ (د) $ح^-$

٥) إذا كانت : د (س) = $\sqrt{س - ١}$ ، ر (س) = $\sqrt{١ - س}$

فإن : مجال (د + ر) هو ....

(أ) [١ ، ∞[(ب)]−∞ ، ١] (جـ) [−١ ، ∞[(د) {١}

⑥ إذا كانت العلاقة بين س ، د (س) ، ر (س)

كما بالجدول المقابل لبعض قيم س

فإن قيمة س التى تحقق أن

ر (د (س)) = −١ هى ....

س	د (س)	ر (س)
−١	−٢	٤
صفر	٠	٣
١	٢	٢
٢	٤	١
٣	٦	٠
٤	٨	−١

(أ) ٨ (ب) ٣

(جـ) ٢ (د) ٤

السؤال الثانى **٤ درجات** كل جزئية درجتان

إذا كانت : د (س) = $\frac{١}{س}$ ، ر (س) = س + ٣

فأوجد : ① (د ∘ ر) (س) ② (ر ∘ د) (س)



اختبار 3 حتى درس 3 من الوحدة الأولى

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول **٦ درجات** كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت الدالة د زوجية فى [أ ، ب] فإن : ب = ...

(أ) أ (ب) − أ (جـ) ٢ أ (د) $أ^{٣}$

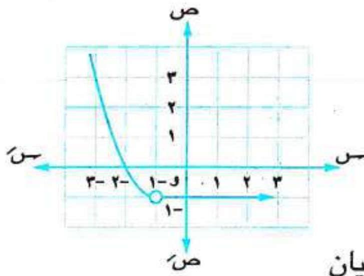
② مجال الدالة د : د (س) = $\frac{٥}{\sqrt[٣]{س - ٨}}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح − {٢} (جـ) ح − {٨} (د) [٨ ، ∞[

③ الدالة الفردية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هى ....

(أ) د (س) = س جا س (ب) د (س) = جتا س

(جـ) د (س) = ٥ (د) د (س) = س جتا س



(٤) الشكل المقابل يمثل دالة

مداها ....

(أ) ح - {-١} (ب) [-١ ، ∞[

(جـ)]-١ ، ∞[(د) ح

(٥) إذا كانت د دالة أحادية وكانت النقطة (٢ ، ٣) تنتمى لبيان الدالة د ، فأى النقط الآتية يمكن أن تنتمى لبيان د ؟

(أ) (٥ ، ٣) (ب) (٢ ، -١) (جـ) (٣ ، ٢) (د) كل ما سبق.

(٦) إذا كانت د (س) = س^{٣} ، ر (س) = س^{٢} + ١ فأى مما يأتى يكون دالة فردية ؟

(I) (د × ر) (II) (د ∘ ر) (III) (ر ∘ د)

(أ) I فقط (ب) II ، III (جـ) I ، II (د) I ، III

السؤال الثانى ٤ درجات

إذا كانت : د$_{١}$ (س) = س^{٥} ، د$_{٢}$ (س) = حا س **أوجد :** (د$_{١}$ + د$_{٢}$) (س)

ثم ابحث نوع (د$_{١}$ + د$_{٢}$) من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك.



اختبار 4 حتى درس 4 من الوحدة الأولى

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٣ درجات

مثل بيانيًا الدالة د : د (س) = $\begin{cases} |س| & \text{عندما } س \geq ٠ \\ س^{٢} & \text{عندما } س < ٠ \end{cases}$ ومن الرسم استنتج مدى الدالة

وبيِّن نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك وادرس اطرادها.

السؤال الثانى ٢ درجة

أوجد مجال الدالة د : د (س) = $\frac{٢ س + ١}{س - ٢}$

وأثبت أن : د دالة أحادية.

السؤال الثالث **٣ درجات**

إذا كانت : د (س) = س^{٢} − ١ ، ر (س) = س + ١

فارسم الدالة $\frac{د}{ر}$ مبيناً مجال ومدى الدالة ثم ابحث اطرادها.

السؤال الرابع **٢ درجة**

ارسم الشكل البيانى للدالة د : د (س) = { س − ١ ، ٢ < س ≤ ٤ ؛ −١ ، −٢ ≤ س ≤ ٢ }

ومن الرسم عين المدى.



اختبار 5 حتى درس 5 من الوحدة الأولى

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول **٦ درجات** *كل جزئية درجة*

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) منحنى الدالة د : د (س) = س^{٢} + ٤ هو نفس منحنى الدالة ر : ر (س) = س^{٢} بإزاحة مقدارها ٤ وحدات فى اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{و س}$ (ب) $\overrightarrow{و س}$ (جـ) $\overleftarrow{و ص}$ (د) $\overrightarrow{و ص}$

(٢) الدالة الأحادية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هى ....

(أ) د$_{١}$ (س) = س + ٢ (ب) د$_{٢}$ (س) = س^{٢}

(جـ) د$_{٣}$ (س) = | س | (د) د$_{٤}$ (س) = ٥

(٣) إذا كانت د دالة حيث د (س) = $\frac{١}{س}$ فإن نقطة التماثل للدالة التى قاعدتها د (س + ١) هى ....

(أ) (١ ، ٠) (ب) (٠ ، ١) (جـ) (−١ ، ٠) (د) (−١ ، ١)

(٤) إذا كانت : د (س) = $\sqrt{س + ٤}$ ، ر (س) = س^{٢} − ٤

فإن : (د ∘ ر) (س) = ...

(أ) | س | (ب) س^{٢} (جـ) س^{٢} + ٤ (د) ٢

⑤ إذا كانت د (س) دالة حقيقية مجالها [-٢ ، ٣] فإن مجال الدالة ر (س) = د (س - ٢)

هو ....

(أ) [-٢ ، ٣] (ب) [-٤ ، ١] (جـ) [٠ ، ٥] (د) ع

⑥ إذا كانت د (س) دالة فردية فإن | د (س) | تكون ....

(أ) فردية. (ب) زوجية.

(جـ) زوجية وفردية معًا. (د) ليست زوجية وليست فردية.

السؤال الثاني ٤ درجات

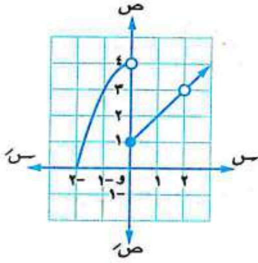
مثل بيانيًا الدالة د : د (س) = | ٤ - $س^٢$ | ومن الرسم استنتج مدى الدالة وبيِّن نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك وادرس اطرادها.



اختبار 1 على درس 1 من الوحدة الثالثة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول **٤ درجات** كل جزئية درجة



من الشكل المقابل أوجد :

(١) د (صفر$^{+}$)　　(٢) د (صفر$^{-}$)

(٣) د (٢)　　(٤) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}$ د (س)

السؤال الثانى **٦ درجات** كل جزئية درجتان

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الشكل المقابل هو التمثيل البيانى للدالة د

فإن : $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـــا}}$ د (س) = ...

(أ) ٢　　(ب) ٣

(جـ) ١　　(د) غير موجودة.

ص
١٠ سم
θ
١٠ سم

(٢) فى الشكل المقابل :

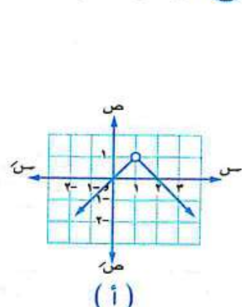
عندما $\theta \leftarrow \frac{\pi}{٢}$

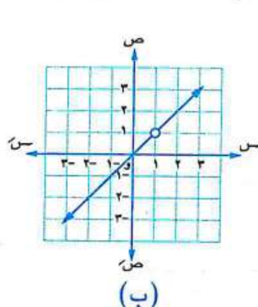
فإن : ص ⟵ .... سم

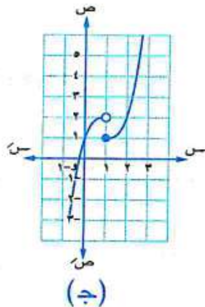
(أ) صفر　　(ب) ٥

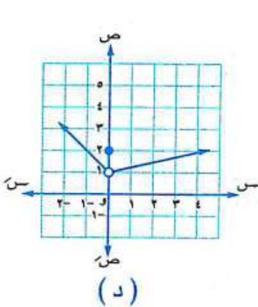
(جـ) ١٠　　(د) $١٠\sqrt{٢}$

(٣) أى من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية ليس لها نهاية عند س = ١ ؟


(أ)


(ب)


(جـ)


(د)

الدرجة الكلية
....
١٠

اختبار 2 حتى درس 2 من الوحدة الثالثة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٢ درجة *كل جزئية نصف درجة*

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

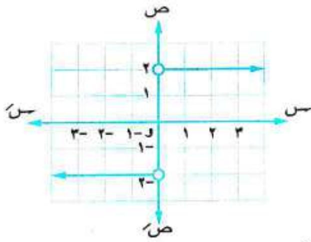
① $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{١ + س}{٤ س - ١} =$ ....

(أ) -١ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{-١}{٤}$ (د) ١

② $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣} =$ ....

(أ) -٦ (ب) صفر (جـ) ٣ (د) ٦

③ الشكل البيانى المقابل يمثل د (س)

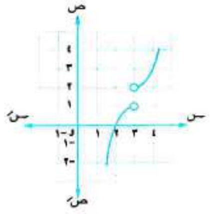


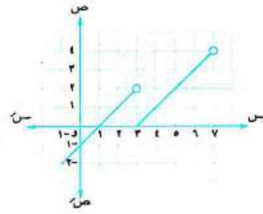
فإن : $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا}$ د (س) = ...

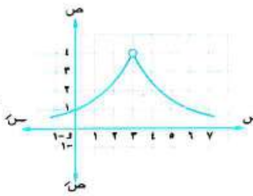
(أ) ٠ (ب) -٢

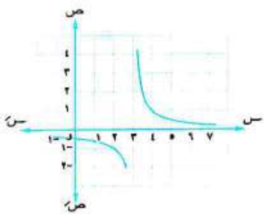
(جـ) ٢ (د) غير موجودة.

④ أى من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية لها نهاية عند س = ٣ ؟


(أ)


(ب)


(جـ)


(د)

السؤال الثانى ٨ درجات *كل جزئية درجتان*

أوجد قيمة : ① $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{\sqrt{س + ٤} - ٢}{س^٢ + س}$ ② $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا} \frac{٣ س^٢ + س - ٤}{س^٢ - ١}$

③ $\underset{س \leftarrow ٤}{نهـا} \frac{س^٢ - ١٥ س - ٤}{س - ٤}$ ④ $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا} \left(\frac{١}{س - ١} - \frac{٣}{س^٣ - ١}\right)$



ثالثًا اختبارات تراكمية قصيرة فى حساب المثلثات



الدرجة الكلية ١٠

اختبار 1 على درس 1 من الوحدة الرابعة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول **٦ درجات** كل جزئية درجة ونصف

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى Δ أ ب حـ إذا كان : أَ = ٦ سم ، ق (∠ ب) = ٢ ق (∠ أ) = ٨٠°

فإن : حـَ = ... سم.

(أ) $\frac{٦ \text{ حا } ٤٠°}{\text{حا } ٦٠°}$ (ب) $\frac{\text{حا } ٦٠°}{٦ \text{ حا } ٤٠°}$ (جـ) $\frac{\text{حا } ٤٠°}{٦ \text{ حا } ٦٠°}$ (د) $\frac{٦ \text{ حا } ٦٠°}{\text{حا } ٤٠°}$

(٢) إذا كان : أ ب حـ مثلثًا متساوى الأضلاع طول ضلعه يساوى ٨ $\sqrt{٣}$ سم فإن طول قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث يساوى .... سم.

(أ) ٨ (ب) ١٦ $\sqrt{٣}$ (جـ) ١٦ (د) ٤ $\sqrt{٣}$

(٣) فى المثلث س ص ع إذا كان : $\frac{٢ \text{ سَ}}{\text{حا س}}$ = ٨ سم

فإن مساحة الدائرة المارة برؤوسه تساوى .... سم^{٢}.

(أ) ١٦ π (ب) ٨ π (جـ) ٤ π (د) ٦٤ π

(٤) إذا كان : أ ب حـ مثلثًا فإن : $\frac{\text{حا }(أ + ب)}{\text{حا أ} + \text{حا ب}}$ = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{\text{حـَ}}{\text{أَ} + \text{بَ}}$ (جـ) $\frac{\text{أَ}}{\text{أَ} + \text{حـَ}}$ (د) $\frac{\text{بَ}}{\text{أَ} + \text{حـَ}}$

السؤال الثانى **٤ درجات**

أ ب حـ مثلث فيه : حـَ = ١٩ سم ، ق (∠ أ) = ١١٢° ، ق (∠ ب) = ٣٣°

أوجد لأقرب رقمين عشريين كلًا من : بَ ، طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث.



أولًا نماذج اختبارات شهر أكتوبر

اختبار 1

1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـــا}} \frac{س^٢ - ٥ س + ٦}{س^٢ - ٩} = ...$

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٦}$ (جـ) $\frac{١}{٥}$ (د) $\frac{١}{٤}$

(٢) مجال الدالة د : د (س) = $\frac{\sqrt{س - ٢}}{س - ٤}$ هو ....

(أ) [٢ ، ∞[(ب)]-∞ ، ٢]

(جـ) [٢ ، ∞[- {٤} (د)]-∞ ، ٢] - {٤}

(٣) جميع الدوال الآتية أحادية على مجالها ما عدا الدالة د (س) = ...

(أ) ٣ س (ب) $\frac{١}{س}$ (جـ) ٥ (د) $س^٣$

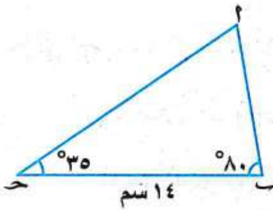
(٤) إذا كان طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ يساوى ٣ سم

وكان جا أ + جا ب + جا جـ = ٢ فإن محيط المثلث = ... سم.

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ١٢ (د) ٢٤

(٥) طول أكبر ضلع فى المثلث المرسوم ≃ .... سم.

(لأقرب عدد صحيح)



(أ) ٢٠ (ب) ١٦

(جـ) ١٥ (د) ١٤

(٦) إذا كانت : $\underset{س \to ١}{\text{نهـــا}} \frac{س^٢ - ك}{س + ٢} = -١$ فإن : ك = ...

(أ) ٤ (ب) -٢ (جـ) ٢ (د) ± ٢

(٧) الدالة د : د (س) = | س + ٢ | تكون تناقصية فى الفترة ....

(أ)]٠ ، ∞[(ب)]٢ ، ∞[(جـ)]-٢ ، ∞[(د)]-∞ ، -٢[

(٨) إذا كانت د دالة فردية فإن : $\frac{٧ د (٣) + ٣ د (-٣)}{٢ د (-٣)}$ = ...

(أ) ٢ (ب) -٢ (جـ) ٥ (د) -٥,٠

(٩) مجموعة الحل فى ح للمعادلة : |س - ٧| = ٢ س - ٢ تساوى ....

(أ) {٣ ، -٥} (ب) {٣} (جـ) {-٥} (د) ∅

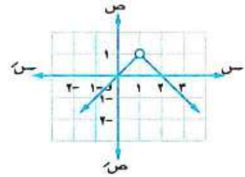
(١٠) نقطة تماثل منحنى الدالة د : د (س) = $\frac{س + ١}{س}$ هى ....

(أ) (٠ ، ١) (ب) (١ ، ٠) (جـ) (٠ ، ٠) (د) (١ ، -١)

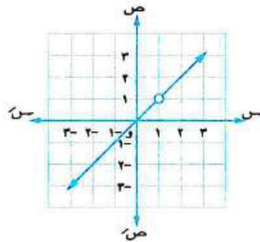
(١١) نهـــا (س ← ٢) $\frac{(س + ١)^{٤} - ٨١}{س - ٢}$ = ...

(أ) ١٨ (ب) ٨١ (جـ) -١٠٨ (د) ١٠٨

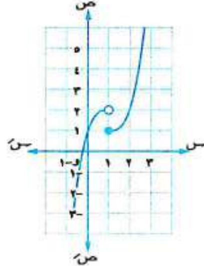
(١٢) أى من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية ليس لها نهاية عند س = ١ ؟



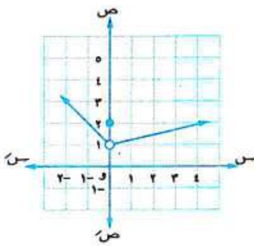
(أ)



(ب)



(جـ)



(د)

---

٢ أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) إذا كان : د (س) = $س^{٢}$ - ٣ ، ر (س) = $\sqrt{س - ٢}$

أوجد (د ∘ ر) (س) فى أبسط صورة ثم أوجد (د ∘ ر) (٣)

(٢) **أوجد :** نهـــا (س ← ١) $\frac{\sqrt{٤ س + ٥} - ٣}{س - ١}$

اختبار 2

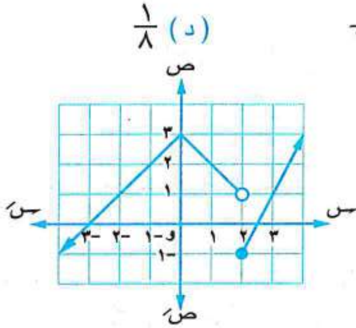
١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى المثلث أ ب حـ يكون $\frac{ب}{٤ جا ب}$ = ... نق

حيث نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب حـ

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٨}$

(٢) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د



فإن : $\lim_{س \to ٢}$ د (س) = ...

(أ) ٣ (ب) ١

(جـ) ١- (د) غير موجودة.

(٣) إذا كان : د (س) = |س − ٢| + ٤ فإن مجموعة حل المعادلة د (س + ٢) = ٦

هى ....

(أ) {٠ ، ٤} (ب) {٢ ، −٢} (جـ) {٢ ، ٤} (د) {−٢ ، −٤}

(٤) إذا كانت د دالة زوجية وكان منحنى الدالة يمر بالنقطة (−٣ ، ٢ م + ١)

وكانت د (٣) = ٥ ، فإن م = ...

(أ) صفر (ب) −١ (جـ) ١ (د) ٢

(٥) مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt{س − ٣}$ ....

(أ) ح (ب) ح − {٣} (جـ) [٣ ، ∞[(د)]−∞ ، ٣]

(٦) إذا كانت د (س) = $\sqrt{س}$ ، ر (س) = $س^٢$ − ١

فإن : (د ∘ ر) (−٣) = ...

(أ) ٢ (ب) −٤ (جـ) ٢$\sqrt{٢}$ (د) غير معرفة.

(٧) $\lim_{س \to ٧} \frac{س^٢ − ٤٩}{٧ − س}$ = ...

(أ) ١٤ (ب) −٤٩ (جـ) ٤٩ (د) −١٤

(٨) نقطة تماثل الدالة د : د (س) = (س − ٢)^{٣} + ١ هى ....

(أ) (٢ ، ١) (ب) (٢ ، −١) (جـ) (−٢ ، ١) (د) (−١ ، −٢)

(٩) الشكل المقابل يمثل الدالة د : د (س) = ...

حيث د : ح ⟵ ح

(أ) س^{٢} + ٢

(ب) (س + ٢)^{٢}

(جـ) س^{٢} − ٤ س + ٤

(د) − (س − ٢)^{٢}

(١٠) إذا كان : $\underset{س \to ٢}{\text{نهـــا}} \frac{س^{٢} - ل}{س - ٣}$ = م فإن : (ل ، م) = ...

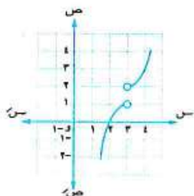
(أ) (٣ ، ٣) (ب) (−٩ ، ٠) (جـ) (٩ ، ٦) (د) (٠ ، ٠)

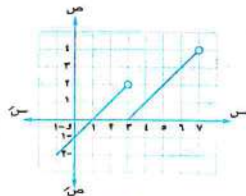
(١١) فى Δ س ص ع إذا كان ق (∠ س) : ق (∠ ص) : ق (∠ ع) = ٢ : ٣ : ١

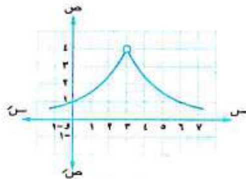
فإن : سَ : صَ : عَ = ...

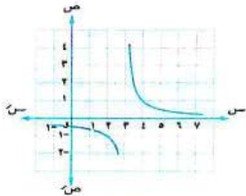
(أ) ٣ : $\sqrt{٢}$: ١ (ب) $\sqrt{٣}$: ٢ : ١ (جـ) $\sqrt{٢}$: $\sqrt{٣}$: ١ (د) ٢ : ٣ : ١

(١٢) أى من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية لها نهاية عند س = ٣ ؟


(أ)


(ب)


(جـ)


(د)

---

٢ أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) ارسم منحنى الدالة د : ح ⟵ ح ، د (س) = |س| + ١ ومن الرسم أوجد المدى وابحث الاطراد وبين نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك.

(٢) أوجد : $\underset{س \to ٢}{\text{نهـــا}} \left(\frac{س^{٣} - ٨}{س^{٥} - ٣٢} + \frac{س^{٤} - ١٦}{س^{٧} - ١٢٨} \right)$

اختبـــار 1



١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة : (١٢ درجة)

١ $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٦}{\text{س}^٢ - ٩}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٦}$ (جـ) $\frac{١}{٥}$ (د) $\frac{١}{٤}$

٢ مجال الدالة د : د (س) = $\frac{\sqrt{\text{س} - ٢}}{\text{س} - ٤}$ هو ....

(أ) [٢ ، ∞[(ب)]−∞ ، ٢]

(جـ) [٢ ، ∞[− {٤} (د)]−∞ ، ٢] − {٤}

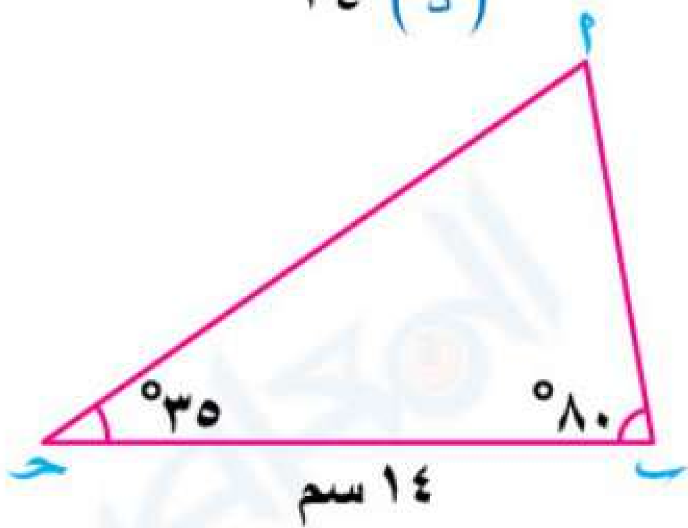
٣ جميع الدوال الآتية أحادية على مجالها ما عدا الدالة د (س) = ...

(أ) ٣ س (ب) $\frac{١}{\text{س}}$ (جـ) ٥ (د) $\text{س}^٣$

٤ إذا كان طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب حـ يساوى ٣ سم

وكان جا أ + جا ب + جا حـ = ٢ فإن محيط المثلث = ... سم.

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ١٢ (د) ٢٤



٥ طول أكبر ضلع فى المثلث المرسوم ≃ .... سم. (لأقرب عدد صحيح)

(أ) ٢٠ (ب) ١٦

(جـ) ١٥ (د) ١٤

٦ إذا كانت : $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}^٢ - \text{ك}}{\text{س} + ٢} = -١$ فإن : ك = ...

(أ) ٤ (ب) −٢ (جـ) ٢ (د) ± ٢

٧ الدالة د : د (س) = | س + ٢ | تكون تناقصية فى الفترة ....

(أ)]٠ ، ∞[(ب) [٢ ، ∞[(جـ)]−٢ ، ∞[(د)]−∞ ، −٢]

٨ إذا كانت د دالة فردية فإن : $\frac{٧\ \text{د}\ (٣) + ٣\ \text{د}\ (-٣)}{٢\ \text{د}\ (-٣)}$ = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ٥ (د) −٠,٥

٩ إذا كانت : د (س) = س − ٣ ، ر (س) = $\text{س}^٢$ فإن : (د ∘ ر) (٥) = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٢٢ (د) ٢٥

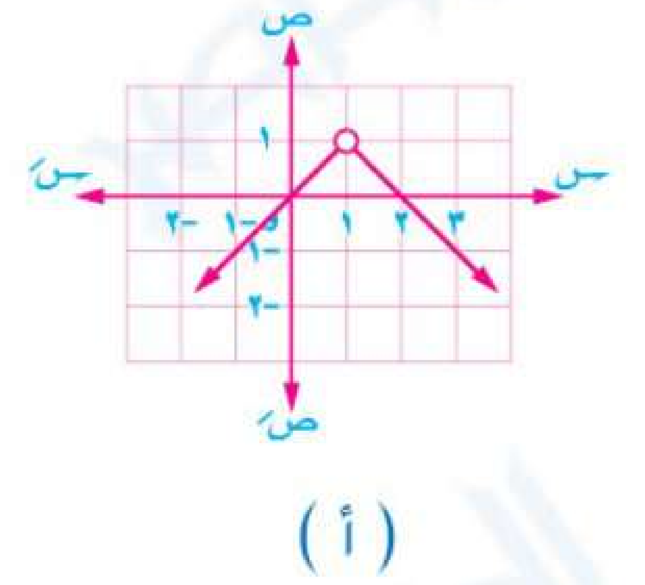
١٠ نقطة تماثل منحنى الدالة د : د (س) = $\frac{س + ١}{س}$ هى ....

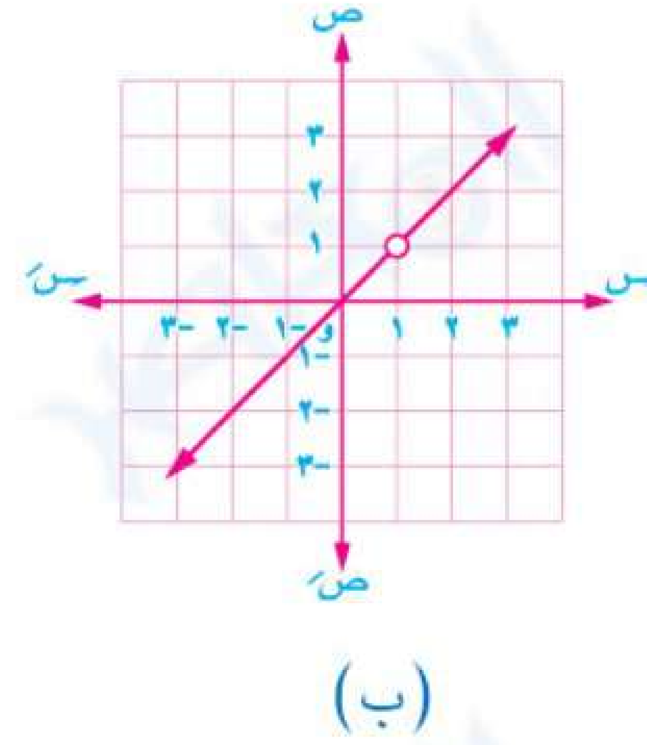
(أ) (٠ ، ١) (ب) (١ ، ٠) (جـ) (٠ ، ٠) (د) (١ ، -١)

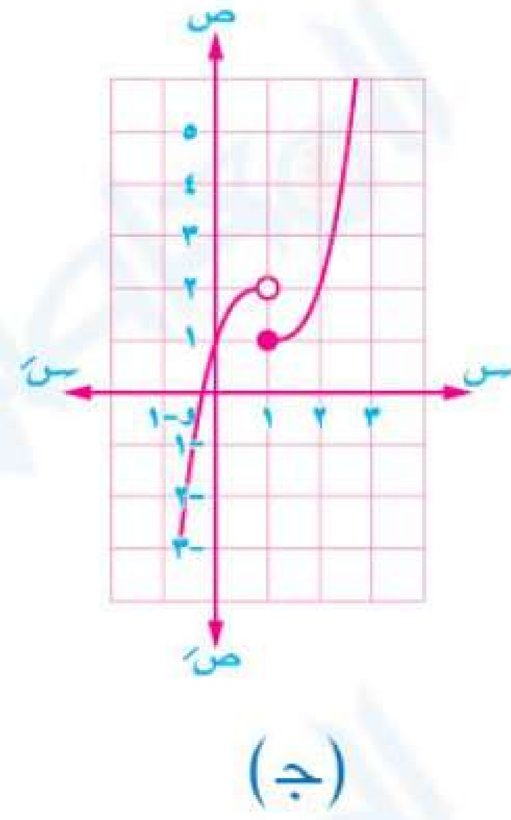
١١ $\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س} - ٢}{س - ٤}$ = ...

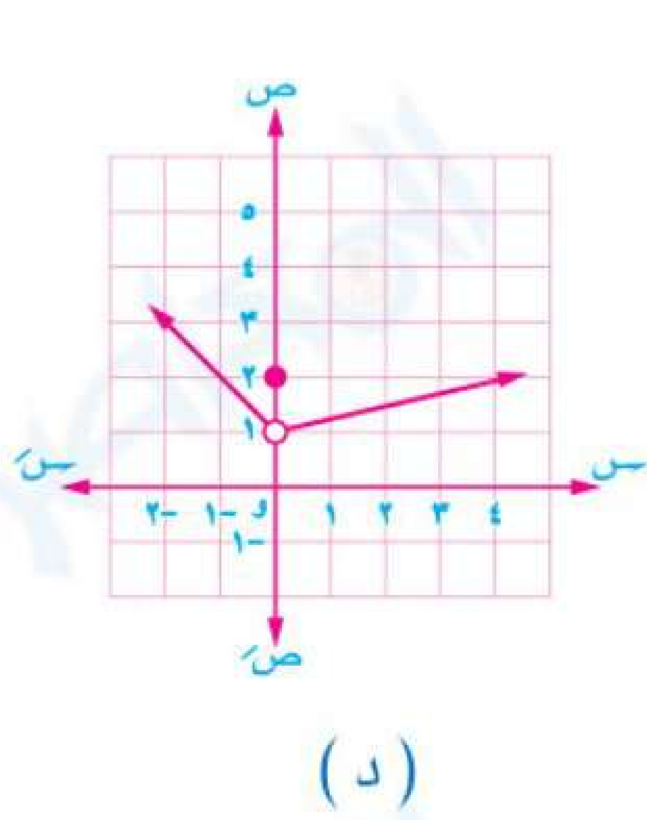
(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٤}$

١٢ أى من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية ليس لها نهاية عند س = ١ ؟


(أ)


(ب)


(جـ)


(د)

٢ أجب عن الأسئلة الآتية :

١ ارسم الشكل البيانى للدالة د : د (س) = $\begin{cases} س^٢ + ١ & ، س > ٠ \\ -س^٢ - ١ & ، س < ٠ \end{cases}$

ومن الرسم حدد مدى الدالة وابحث اطرادها. (درجتان)

٢ إذا كان : د (س) = $س^٢ - ٣$ ، ر (س) = $\sqrt{س - ٢}$

أوجد (د ∘ ر) (س) فى أبسط صورة محددًا المجال ثم أوجد (د ∘ ر) (٣) (درجتان)

٣ أوجد : $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{٤س + ٥} - ٣}{س - ١}$ (درجتان)

٤ أ ب جـ ء متوازى أضلاع فيه : ق (∠ أ) = ٥٠° ، ق (∠ ء ب جـ) = ٧٠° ، ب ء = ٨ سم

أوجد محيط متوازى الأضلاع لأقرب سم. (درجتان)

الدرجة
....
٢٠

اختبــــار 2

١ اخترالإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة : (١٢ درجة)

١ فى المثلث ٢ ب حـ يكون $\frac{٤ ب}{حا ب}$ = ... نق
حيث نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث ٢ ب حـ

(أ) ٤　(ب) ٨　(جـ) $\frac{١}{٢}$　(د) $\frac{١}{٨}$

٢ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

فإن : نهـــا د (س) = ... (س ← ٢)

(أ) ٣　(ب) ١
(جـ) −١　(د) غير موجودة.

٣ الدالة الأحادية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هى ....

(أ) د (س) = $س^٢$　(ب) د (س) = −٢
(جـ) د (س) = |س|　(د) د (س) = $\frac{١}{س}$

٤ إذا كانت د دالة زوجية وكان منحنى الدالة يمر بالنقطة (−٣ ، ٢ م + ١)
وكانت د (٣) = ٥ فإن م = ...

(أ) صفر　(ب) −١　(جـ) ١　(د) ٢

٥ مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt{س - ٣}$ ....

(أ) ح　(ب) ح − {٣}　(جـ)]٣ ، ∞[　(د)]−∞ ، ٣[

٦ إذا كانت د (س) = $\sqrt{س}$ ، ر (س) = $س^٢$ − ١ فإن : (د ∘ ر) (−٣) = ...

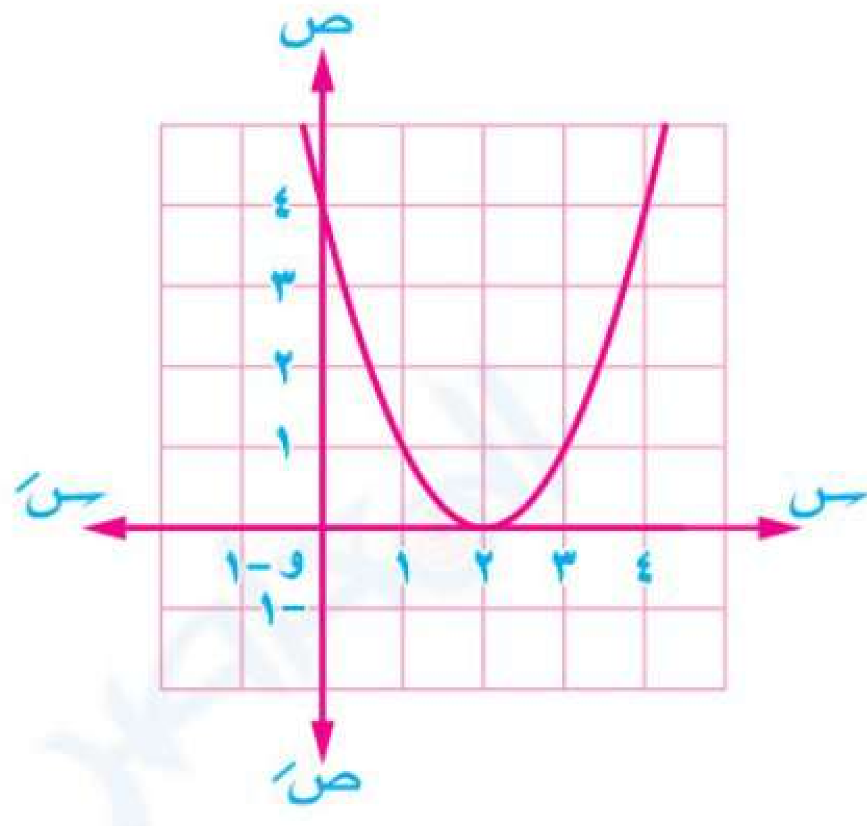
(أ) ٢　(ب) −٤　(جـ) ٢ $\sqrt{٢}$　(د) غير معرفة.

٧ نهـــا (س ← ٧) $\frac{س^٢ - ٤٩}{س - ٧}$ = ...

(أ) ١٤　(ب) −٤٩　(جـ) ٤٩　(د) −١٤

٨ نقطة تماثل الدالة د : د (س) = $(س - ٢)^٣$ + ١ هى ....

(أ) (٢ ، ١)　(ب) (٢ ، −١)　(جـ) (−٢ ، ١)　(د) (−١ ، −٢)



٩ الشكل المقابل يمثل الدالة د : د (س) = ...

حيث د : ح ⟵ ح

(أ) $س^٢ + ٢$

(ب) $(س + ٢)^٢$

(جـ) $س^٢ - ٤ س + ٤$

(د) $-(س - ٢)^٢$

١٠ إذا كان : $\underset{س \to ٣}{نهـا} \frac{س^٢ - ل}{س - ٣} = م$ فإن : (ل ، م) = ...

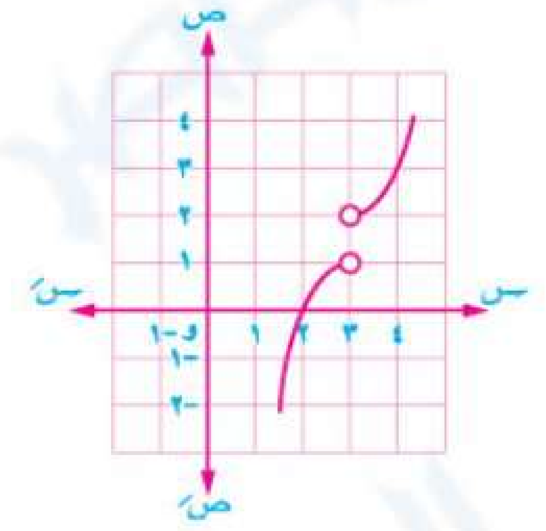
(أ) (٣ ، ٣) (ب) (-٩ ، ٠) (جـ) (٩ ، ٦) (د) (٠ ، ٠)

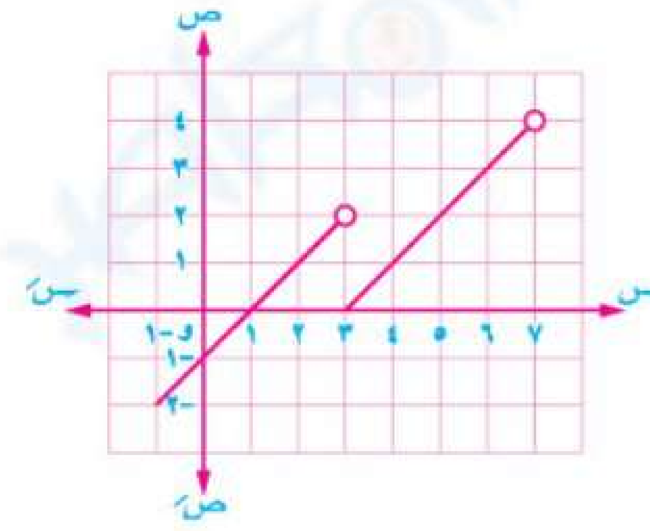
١١ فى Δ س ص ع إذا كان ق (∠ س) : ق (∠ ص) : ق (∠ ع) = ٢ : ٣ : ١

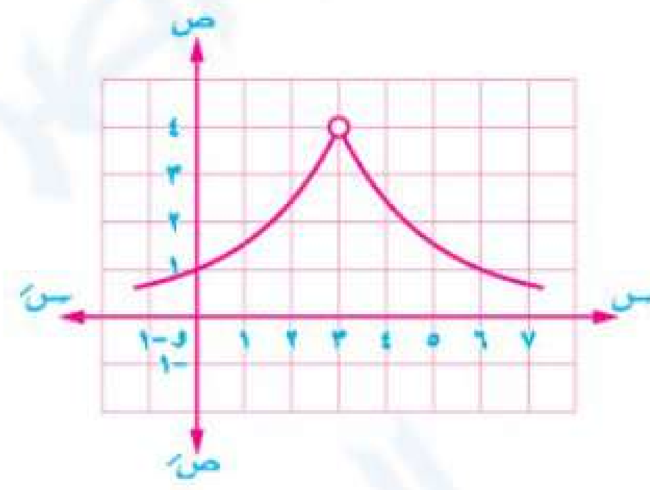
فإن : سَ : صَ : عَ = ...

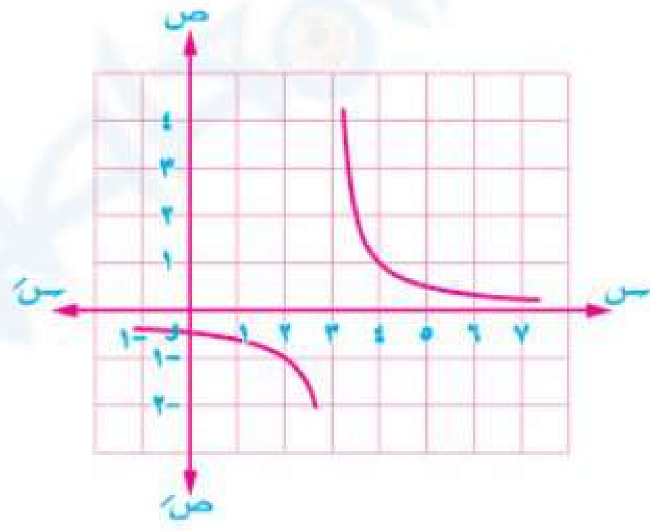
(أ) $٣ : \sqrt{٢} : ١$ (ب) $\sqrt{٣} : ٢ : ١$ (جـ) $\sqrt{٢} : \sqrt{٣} : ١$ (د) ٢ : ٣ : ١

١٢ أى من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية لها نهاية عند س = ٣ ؟


(أ)


(ب)

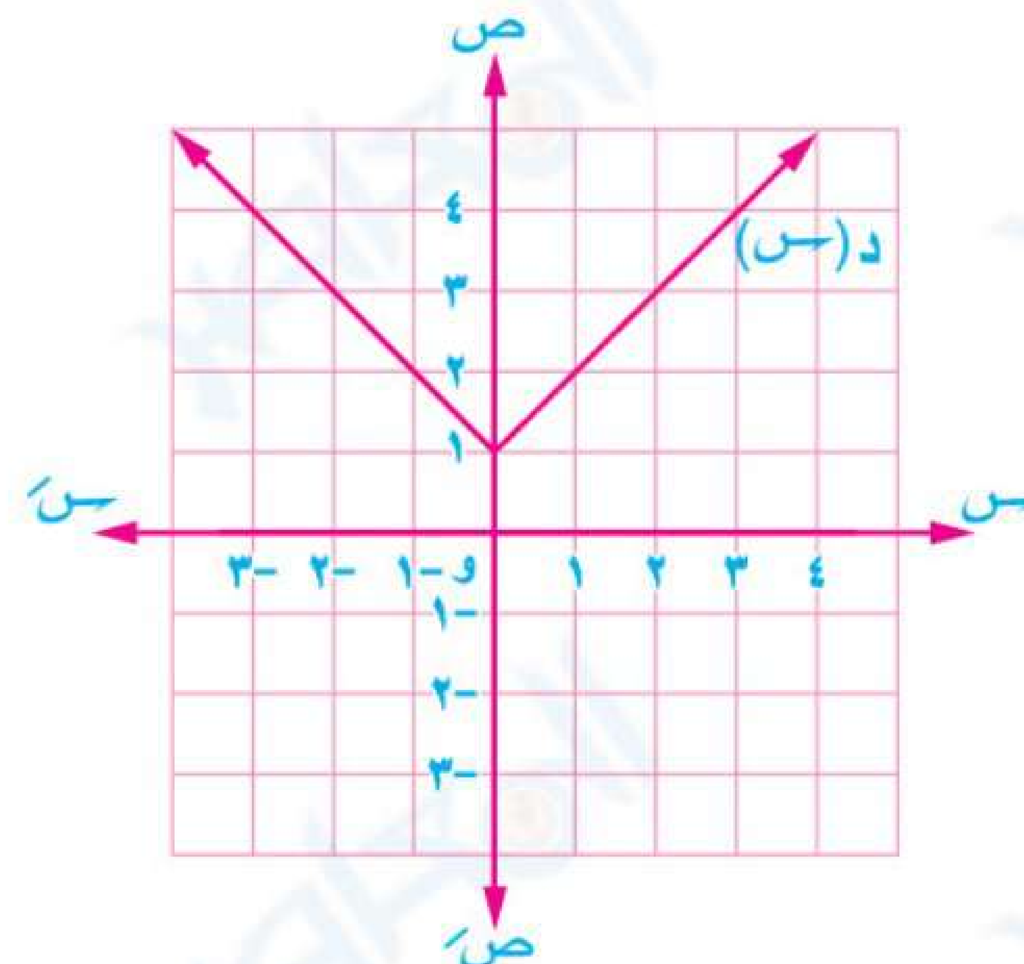

(جـ)

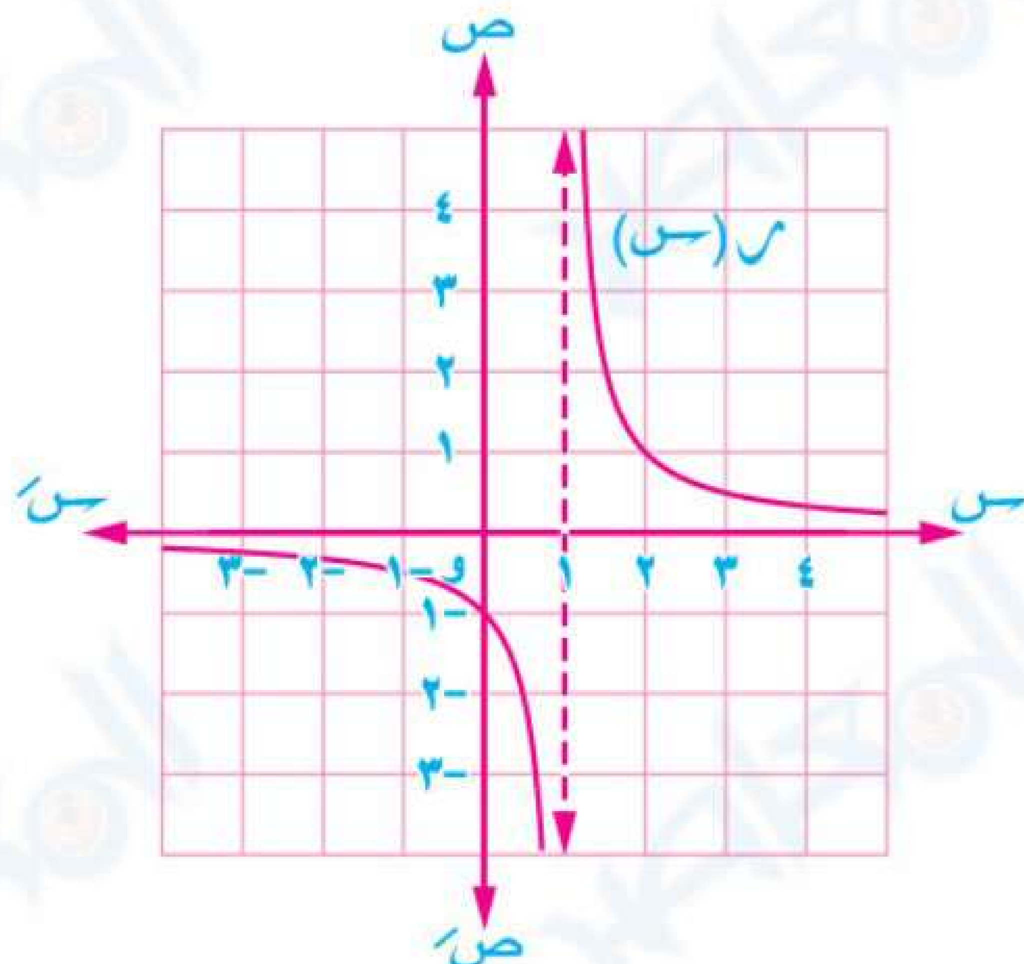

(د)

٢ أجب عن الأسئلة الآتية :

١ ارسم منحنى الدالة د : ح ⟵ ح ، د (س) = |س| + ١ ومن الرسم أوجد المدى وابحث الاطراد وبين نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك. **(درجتان)**

٢ من الشكلين التاليين : **(درجتان)**





أوجد (د ∘ ر) (س) مبينًا المجال.

٣ أوجد : $\lim\limits_{س \to ٥} \frac{\sqrt{س + ١١} - ٤}{س^٢ - ٢٥}$ **(درجتان)**

٤ في الشكل المقابل :



م دائرة ، أب = ٥ سم ، ق (∠ أ م ب) = ٨٠°

، ق (∠ حـ أ ب) = ٨٥°

أوجد : ١ محيط Δ أ ب حـ

٢ مساحة سطح الدائرة م **(درجتان)**

إجابة اختبار 1

1

١ (ب)	٢ (جـ)	٣ (جـ)	٤ (جـ)	٥ (جـ)
٦ (أ)	٧ (د)	٨ (ب)	٩ (جـ)	١٠ (أ)
١١ (د)	١٢ (جـ)			

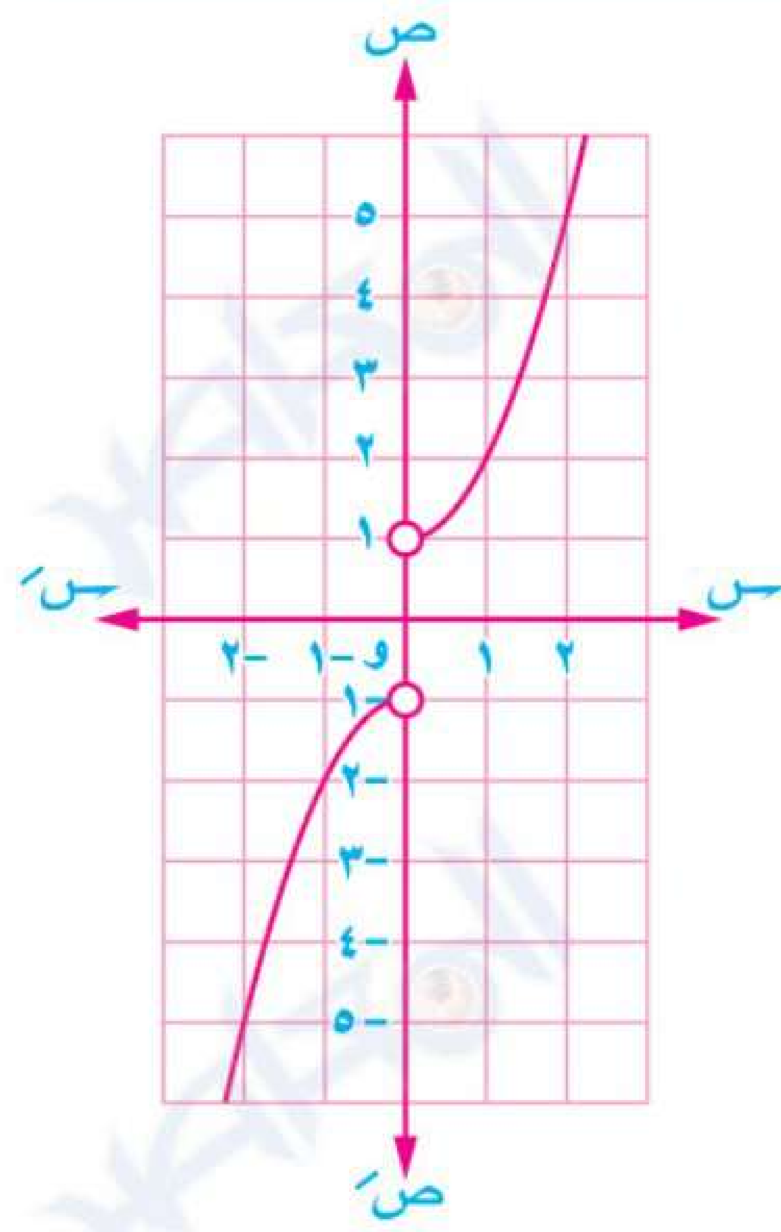
2 ١ من الرسم :

- مدى الدالة د

= ح − [−١ ، ١]

- الدالة تزايدية

فى ح − {٠}



٢ ∵ (د ∘ ر) (س) = د (ر (س)) = د ($\sqrt{س - ٢}$) = ($\sqrt{س - ٢}$)^{٢} − ٣ = س − ٢ − ٣ = س − ٥

، ∵ م$_{١}$ = مجال ر = [٢ ، ∞[

، قيم س التى تجعل ر (س) فى مجال د هى م$_{٢}$ = ح

∴ مجال (د ∘ ر) = م$_{١}$ ∩ م$_{٢}$ = [٢ ، ∞[، (د ∘ ر) (٣) = ٣ − ٥ = −٢

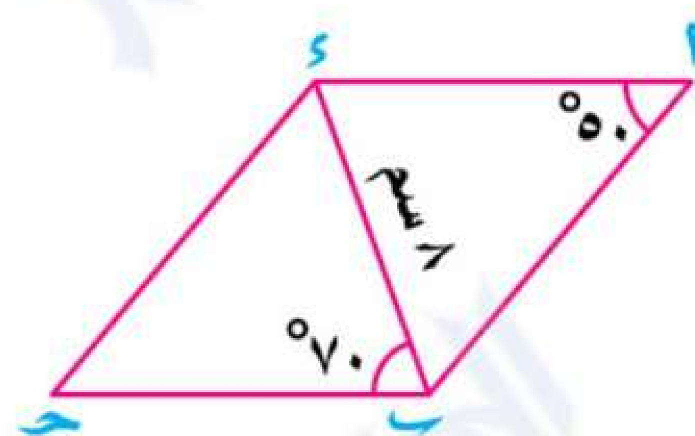
٣ نهــــا$_{س ← ١}$ $\frac{\sqrt{٤س + ٥} - ٣}{س - ١}$ × $\frac{\sqrt{٤س + ٥} + ٣}{\sqrt{٤س + ٥} + ٣}$ = نهــــا$_{س ← ١}$ $\frac{٤س + ٥ - ٩}{(س - ١)(\sqrt{٤س + ٥} + ٣)}$

= نهــــا$_{س ← ١}$ $\frac{٤ (س - ١)}{(س - ١)(\sqrt{٤س + ٥} + ٣)}$ = $\frac{٤}{٦}$ = $\frac{٢}{٣}$

٤ ∵ أ ب حـ ء متوازى أضلاع.

∴ ق (∠ حـ) = ٥٠°

فى Δ ب ء حـ : ق (∠ ب ء حـ) = ١٨٠° − (٥٠° + ٧٠°) = ٦٠°



∴ $\frac{٨}{جا ٥٠°}$ = $\frac{ب حـ}{جا ٦٠°}$ = $\frac{ء حـ}{جا ٧٠°}$ ∴ ب حـ ≃ ٩ سم ، ء حـ ≃ ٩٫٨ سم

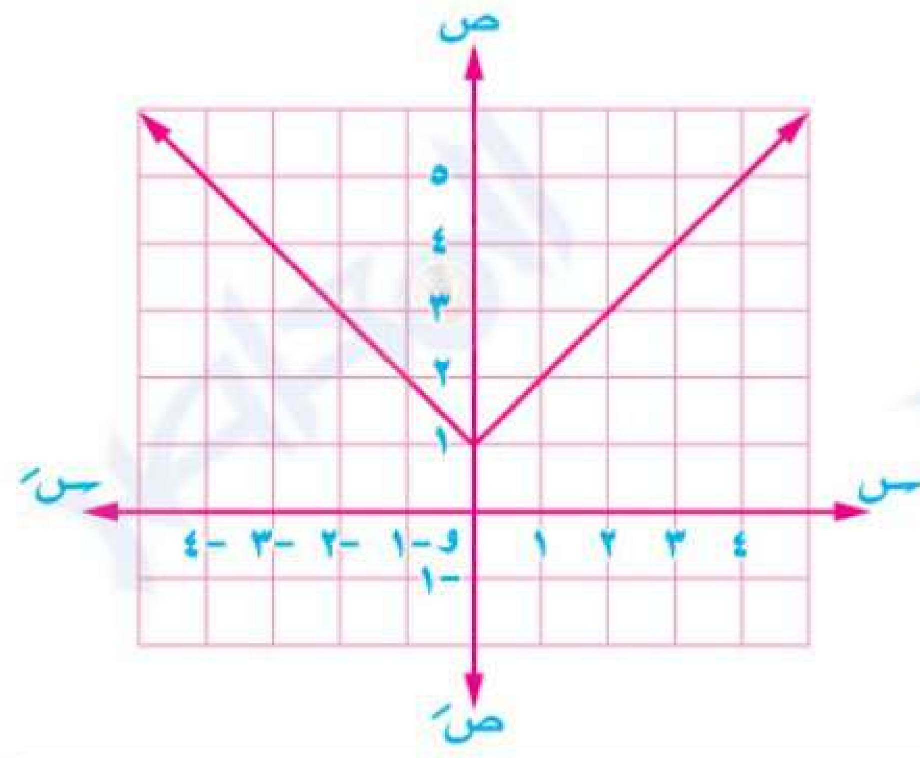
∴ محيط متوازى الأضلاع = ٢ (ب حـ + حـ ء) ≃ ٣٨ سم

إجابة اختبار 2

1

١ (ب)	٢ (د)	٣ (د)	٤ (د)	٥ (جـ)
٦ (جـ)	٧ (د)	٨ (أ)	٩ (جـ)	١٠ (جـ)
١١ (ب)	١٢ (جـ)			

2 ١ من الرسم :



- المدى = $[1 ، \infty[$
- الاطراد :

الدالة تناقصية فى $]-\infty ، 0[$ وتزايدية فى $]0 ، \infty[$

- النوع : الدالة زوجية.

٢ د (س) = | س | + ١ ، ر (س) = $\frac{1}{س - 1}$

$\therefore$ (د ∘ ر) (س) = د [ر (س)] = د $\left(\frac{1}{س-1}\right)$ = $\left|\frac{1}{س-1}\right| + 1$

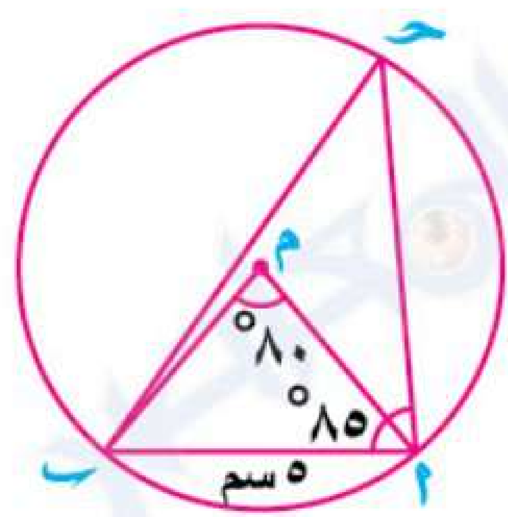
، $م_1$ = مجال ر = ح − {١} ، قيم س التى تجعل ر (س) فى مجال د هى $م_2$ = ح

$\therefore$ مجال (د ∘ ر) = ح − {١}

٣ $\lim_{س \to 5} \frac{\sqrt{س+11} - 4}{س^2 - 25} \times \frac{\sqrt{س+11}+4}{\sqrt{س+11}+4} = \lim_{س \to 5} \frac{س + 11 - 16}{(س-5)(س+5)(\sqrt{س+11}+4)}$

$= \lim_{س \to 5} \frac{1}{(س+5)(\sqrt{س+11}+4)} = \frac{1}{(5+5)(\sqrt{5+11}+4)} = \frac{1}{80}$

٤ فى Δ أ ب حـ :



ق (∠ حـ) = $\frac{1}{2}$ ق (∠ أ م ب) = ٤٠°

، ق (∠ أ ب حـ) = ١٨٠° − (٤٠° + ٨٥°) = ٥٥°

$\therefore$ $\frac{5}{حا 40°} = \frac{بَ}{حا 55°} = \frac{أَ}{حا 85°}$ = ٢ نق = $\frac{محيط Δ أ ب حـ}{حا 40° + حا 55° + حا 85°}$

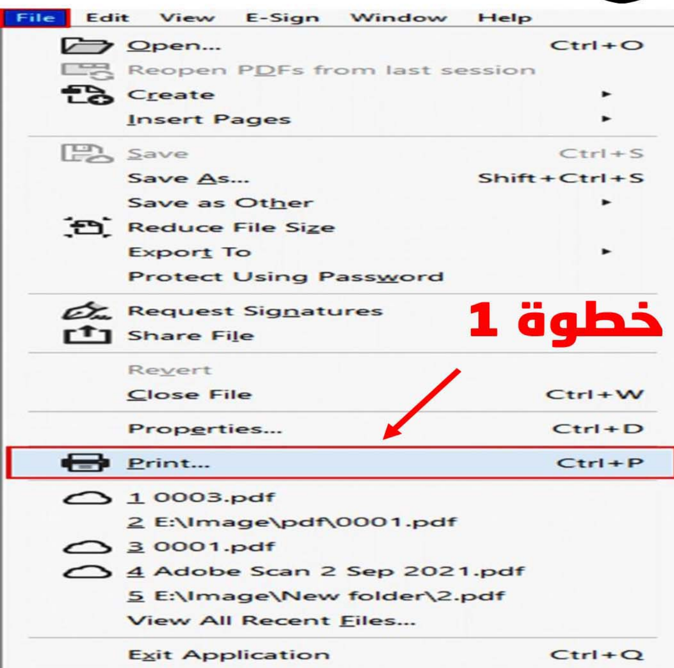
$\therefore$ محيط Δ أ ب حـ ≃ ١٩,١٢ سم ، نق ≃ ٣,٨٩ سم

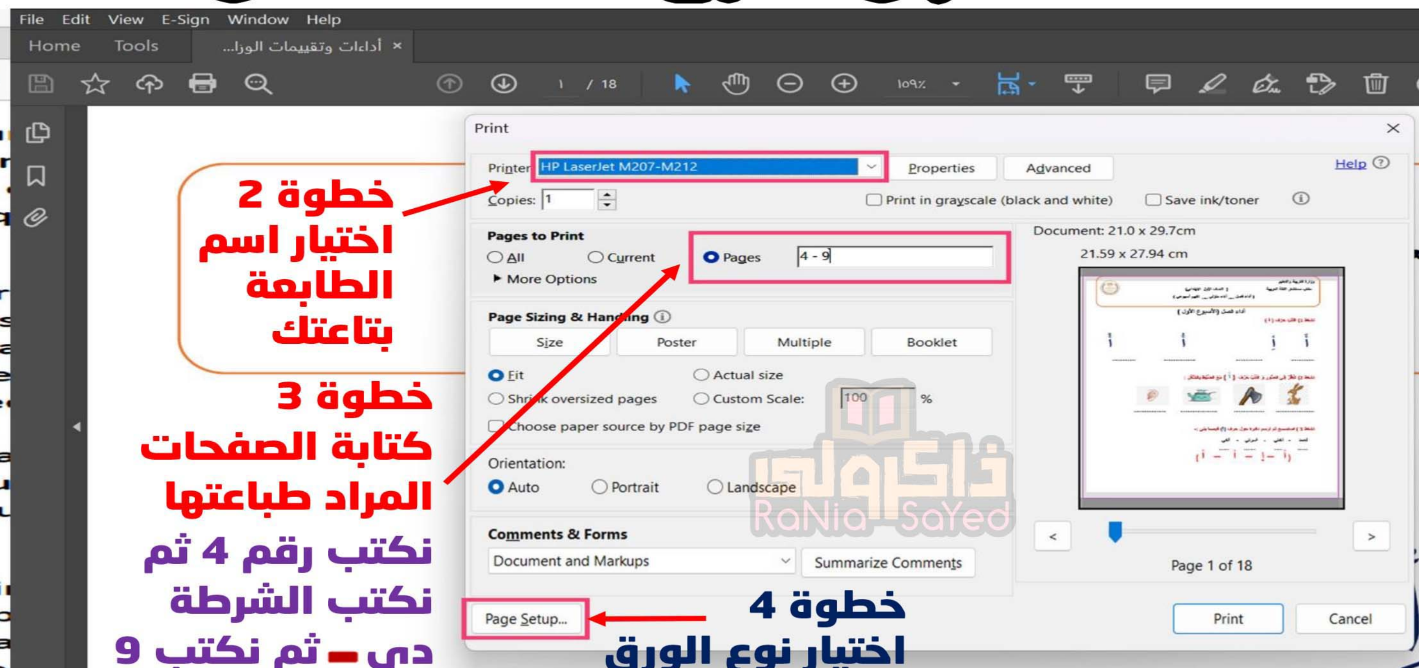
$\therefore$ مساحة الدائرة = π $نق^2$ = π $(3,89)^2$ ≃ ٤٧,٥ $سم^2$

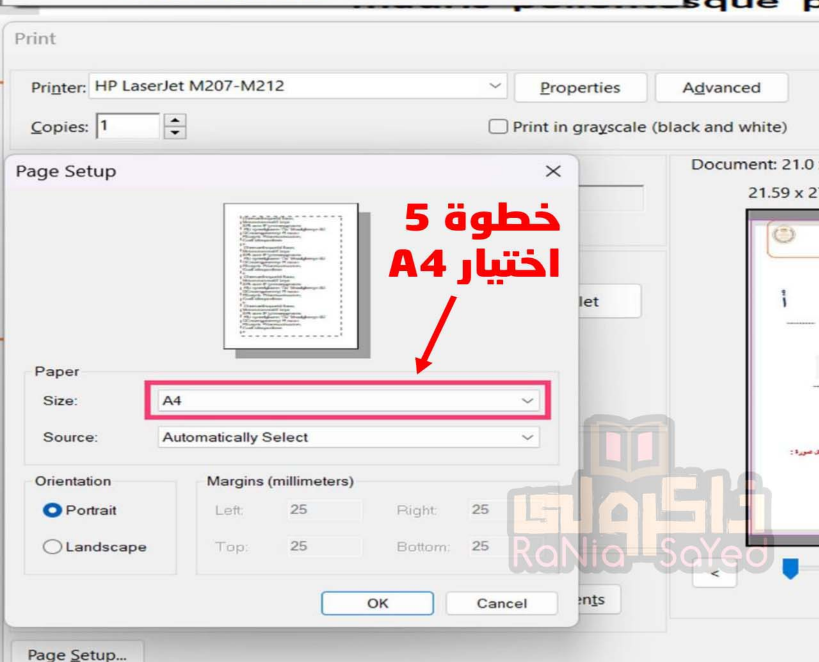
كيفية طباعة صفحات معينة من ملف معين

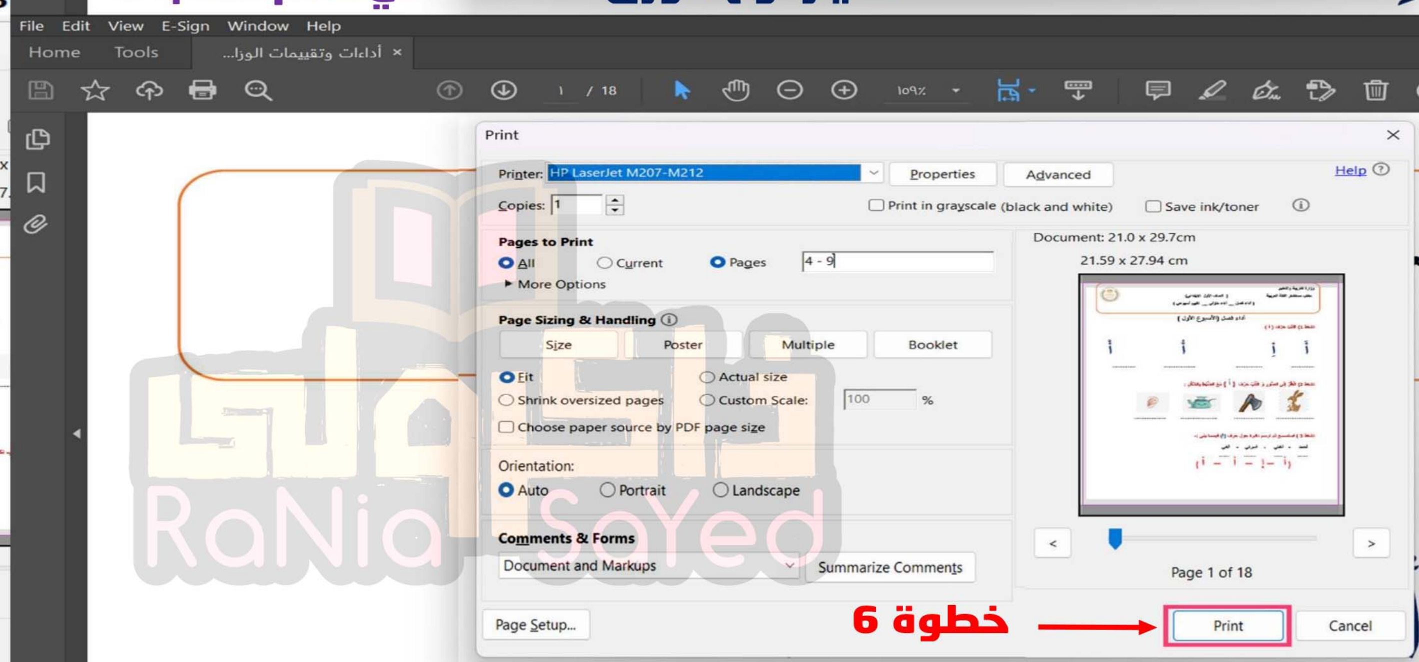
مثلا ازاى نطبع الصفحات من صفحة 4 الى صفحة 9

ذاكرولى RaNia SaYed









حمل الآن

مجانا وحصريا

المراجعة رقم (2)

اختبار شهر اكتوبر





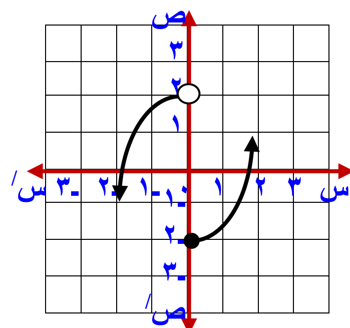
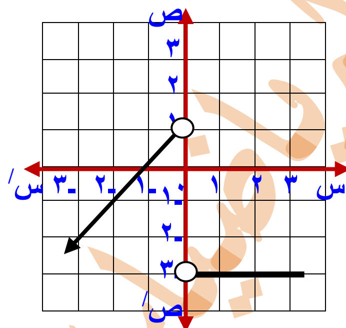
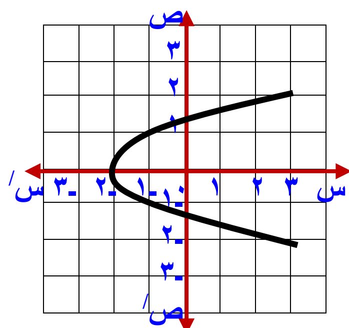
مجـــــال الدالــــــة

* إذا كانت سـ، صـ مجموعتين جزئيتين غير خاليتين من المجموعة ع فإن العلاقة من سـ إلى صـ تسمى دالة إذا ارتبط كل عنصر من سـ بعنصر واحد فقط من صـ ، تسمى سـ مجال الدالة ، صـ المجال المقابل لها

* مدى الدالة هو مجموعة صور عناصر المجال ، وهو مجموعة جزئية من المجال المقابل.

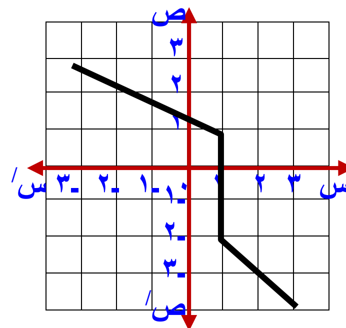
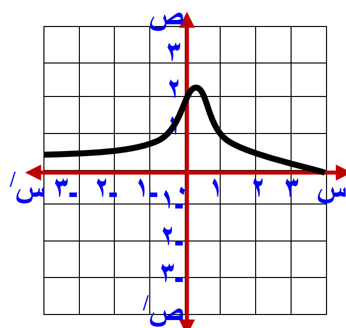
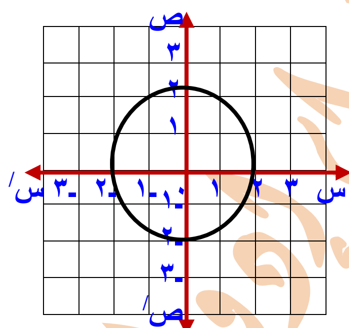
* العلاقة لا تمثل دالة إذا وجد مستقيم واحد على الأقل يوازى محور الصادات ويقطع الشكل البيانى للدالة فى أكثر من نقطة

مثـــ١ـــال :أى من الأشكال يمثل دالة وأى لا يمثل دالة

يمثل دالة لأن كل عنصر فى المجال له صورة واحدة على الأكثر	يمثل دالة لأن كل عنصر فى المجال له صورة واحدة على الأكثر	لا يمثل دالة لأن كل قيمة حقيقية للمتغير سـ يناظرها قيمتان مختلفتان صـ

مثـــ٢ـــال بين أياً من الأشكال البيانية يمثل دالة أيها لا

لا يمثل دالة لأنه يوجد خط رأسى عند النقطة ١ ∋ المجال يقطع المنحنى فى أكثر من نقطة	يمثل دالة لأن كل خط رأسى يقطع المنحنى فى نقطة واحدة على الأكثر	لا يمثل دالة لأن يوجد خط مستقيم // محور الصادات يقطع الشكل البيانى فى أكثر من نقطة

تحديد مجال الدالة الحقيقية

[١] مجال الدالة كثيرة الحدود: هو ع مالم تكن معرفة على مجموعة جزئية منها

[٢] مجال الدالة الكسرية : هو ع ـ مجموعة أصفار المقام

[٣] مجال الدالة الجذرية : إذا كانت : د (س) = $\sqrt[ن]{هـ(س)}$ حيث ن ∈ $ص^+$

!) عندما: (ن) عدد فردى فإن مجال الدالة = ع

!!) عندما (ن) عدد زوجى فإن مجال الدالة هو مجموعة قيم س بشرط هـ (س)≥ ٠

مثــ١ــال: عين مجال الدالة : د(س) = $س^٣$ ــ ٥ س + ٤

الدالة كثيرة الحدود ∴ مجال الدالة هو ع

مثــ٢ــال: عين مجال الدالة : د(س) = $\frac{س - ٣}{س^٢ - ٩}$

الدالة الكسرية الجبرية : مجالها = ع ـ { أصفار المقام }

بوضع المقام = ٠ ⟸ $س^٢$ ـ ٩ = (س ـ٣)(س +٣) = ٠ ⟸ س = ٣ ، أ ـ٣

∴ مجال الدالة = ع ــ {-٣ ، ٣}

مثــ٣ــال: عين مجال الدالة : د(س) = ٥ + $\sqrt{س - ٣}$

الدالة على صورة دالة جذرية : د(س) = $\sqrt{ر(س)}$

مجالها جميع الأعداد الحقيقية التى تجعل ر(س) ≥ صفر (ما تحت الجذر ≥ صفر)

مجال الدالة = { س : س∈ ع ، س ــ ٣ ≥ ٠}

= { س : س ∈ ع ، س ≥ ٣ } = [٣ ، ∞ [

مثــ٤ــال: عين مجال الدالة : د(س) = $\frac{س^٢ + ٢س}{س^٢ - ٥س + ٦}$

الدالة الكسرية الجبرية : مجالها = ع ـ { أصفار المقام }

بوضع المقام = ٠ ⟸ $س^٢$ ـ ٥س +٦ = (س ـ٢)(س ـ٣) = ٠ ⟸ س = ٢ أ، ٣

∴ مجال الدالة = ع ــ {٢ ، ٣}

مثــ٥ــال: عين مجال الدالة : د(س) = $\sqrt[3]{\text{س} + ٨}$

الدالة على صورة دالة جذرية : د(س) = $\sqrt[3]{\text{ر(س)}}$

مجالها جميع الأعداد الحقيقية   مجال الدالة هو ع

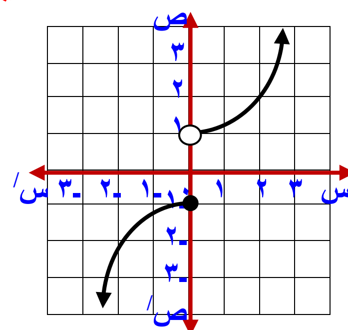
مثــ٦ــال: عين مجال الدالة : د(س) = $\frac{\text{٢س}}{\text{س}^{٢} + ٤}$

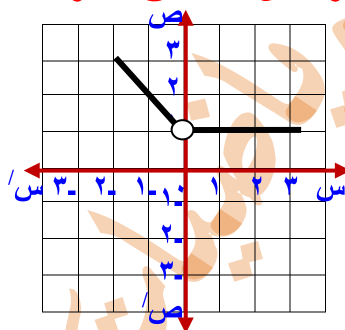
الدالة الكسرية الجبرية : مجالها = ع − { أصفار المقام }

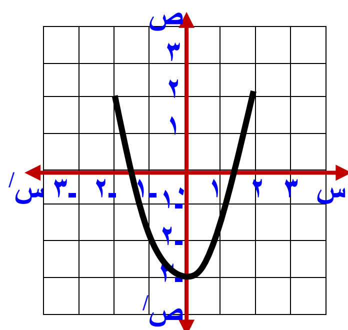
بوضع المقام = ٠ ⟸ س^{٢} + ٤ ⟸ س^{٢} = ـ ٤ ⟸ ليس لها حل فى ع

∴ مجال الدالة هو ع

مثـــــ٧ـــــال :عين مجال ومدى كل من الدوال الممثلة







المجال = ع المدى = ع −]١ ، ـ١[	المجال = ع − {٠} المدى = [١ ، ٣[	المجال = [ـ٢ ، ٢] المدى = [ـ٣ ، ٢]

العمليات على الدوال

إذا كانت : د$_{١}$ ، د$_{٢}$ دالتين مجالهما م$_{١}$ ، م$_{٢}$ على الترتيب فإن:

- (د$_{١}$ ± د$_{٢}$) (س) = د$_{١}$ (س) ± د$_{٢}$ (س) ⟸ حيث مجال (د$_{١}$ ± د$_{٢}$) هو م$_{١}$ ∩ م$_{٢}$
- (د$_{١}$ × د$_{٢}$) (س) = د$_{١}$ (س) × د$_{٢}$ (س) ⟸ حيث مجال (د$_{١}$ ± د$_{٢}$) هو م$_{١}$ ∩ م$_{٢}$
- ($\frac{\text{د}_{١}}{\text{د}_{٢}}$) (س) = $\frac{\text{د}_{١}\text{(س)}}{\text{د}_{٢}\text{(س)}}$

حيث مجال ($\frac{\text{د}_{١}}{\text{د}_{٢}}$) هو م$_{١}$ ∩ م$_{٢}$ ـ مجموعة أصفار د$_{٢}$

مثـــ٨ــال : عين مجال د(س) = $\sqrt{س - ٣}$ + $\sqrt{٥ - س}$

الحـــــــــــل

مجال الدالة = $\sqrt{س - ٣}$ م١ = { س : س ∋ ع ، س − ٣ ⩾ ٠ } = [٣ ، ∞ [

مجال الدالة = $\sqrt{٥ - س}$ م١ = { س : س ∋ ع، ٥ − س ⩾٠} =] − ∞ ، ٥]

مجال الدالة = م١ ∩ م٢ = { س : س ∋ ع ، س ⩾ ٣ ، س ⩽٥ } = [٣ ، ٥]

مثـــ٩ــال : عين مجال د(س) = $\frac{\sqrt{س - ٢}}{س - ٣}$

الحـــــــــــل

مجال البسط م١ = { س : س ∋ ع ، س − ٢ ⩾ ٠} = [٢ ، ∞ [

مجال المقام م٢ = ع − ٣

مجال الدالة = م١ ∩ م٢ − { أصفار المقام}

= { س : س ∋ ع ، س − ٢ ⩾ ٠} − { ٣ } = [٢، ∞ [− { ٣ }

مثـــ١٠ــال : عين مجال د(س) = $\frac{س + ٥}{\sqrt{س + ١}}$

الحـــــــــــل

مجال البسط = م١ = ع ، مجال المقام =م٢= { س : س ∋ ع ، س +٢ > ٠}

مجال الدالة = { س : س ∋ ع ، س ⩾ − ١} =] − ١، ∞ [

مثـــ١١ــال : عين مجال د(س) = $\sqrt{س - ٢}$ + $\frac{١}{\sqrt{٨ - س^٢}}$

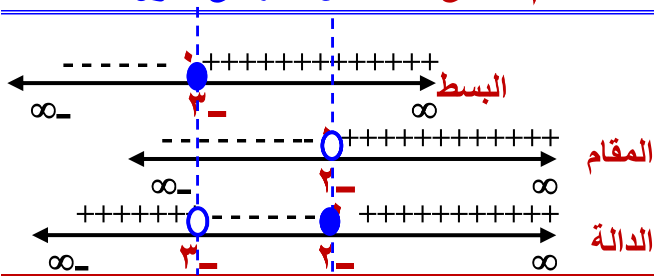
الحـــــــــــل

م١ = { س : س ∋ ع ، س − ٢ ⩾ ٠ } = [٢ ، ∞ [

م٢ = { س : س ∋ ع ، ٨ − س٢ > ٠} =] − ∞ ، ٤[

مجال الدالة = م١ ∩ م٢ = [٢ ، ∞ [∩] − ∞، ٤[= [٢ ، ٤ [

مثـــ١٢ــال :عين مجال د(س) = $\sqrt{\frac{س + ٣}{س + ٢}}$



الحـــــــــل

مجال الدالة هو] -٢ ، ا [∪] ا ، -٣[
= ع - [-٣ ، -٢]

تركيب دالتين

إذا كانت : د ، ر دالتين فإن تركيب الدالة د مع الدالة ر ينتج دالة جديدة يرمز لها بالرمز (د ○ ر) وتقرأ د تركيب ر أو(د بعد ر) ويكون (د ○ ر)(س) = د(ر(س))
وتطبق قاعدة الدالة ر أولاً ثم قاعدة الدالة د

❖ لتعيين مجال الدالة: د ○ ر نتبع الخطوات التالية

(١) نوجد م$_١$ = مجال الدالة ر(س)

(٢) نوجد م$_٢$ = قيم س التى تجعل ر(س) فى مجال د

(٣) نوجد م$_١$ ∩ م$_٢$ وهو مجال د ○ ر

❖ (د ○ ر)(س) ≠ (ر ○ د)(س) عملية تركيب دالتين ليست عملية إبدالية

مثـــ١٣ـال :إذا كانت: د(س) = ٢س + ٣ ، ر(س) = س^٢ + ١ فأوجد كلاً من التركيبات

Ⓐ (د ○ ر) (س) Ⓑ (ر ○ د) (س) Ⓒ (د ○ د) (س)

الحـــــــــل

Ⓐ (د ○ ر) (س) = د (ر (س)) = ٢(ر (س)) +٣
= ٢(س^٢ +١) +٣ = ٢س^٢ + ٢ + ٣ = ٢س^٢ + ٥

Ⓑ (ر ○ د) (س) = ر (د (س)) = (د (س))^٢ +١
= (٢س + ٣)^٢ + ١ = ٤س^٢ +١٢س + ٩ + ١
= ٤س^٢ +١٢س + ١٠

[نلاحظ من المثال أن : (د ○ ر)(س) X (ر ○ د)(س)]

Ⓒ (د ○ د) (س) = د (د(س)) = د (٢س + ٣)
= ٢(٢س + ٣) +٣ = ٤س + ٦ + ٣ = ٤س + ٩

مثـــ١٤ــال : إذا كان د(س) = $\sqrt{س - ١}$ ، ر(س) = س^{٢} ـ ٣

أوجد (د ○ ر) (س) فى أبسط صورة موضحاً المجال ثم أوجد (د ○ ر) (٢)

الحـــــــــــــل

• (د ○ ر) (س) = د (ر (س)) = $\sqrt{(ر (س)) - ١}$

= $\sqrt{س^{٢} - ٣ - ١}$ = $\sqrt{س^{٢} - ٤}$

ر(س) = س^{٢} ـ ٣ ⟸ مجال ر(س) = م$_{١}$ = ع

• مجال (د ○ر) (س)

بوضع (س^{٢} ـ ٤) ⩾ ٠ ⟸ (س ـ٢)(س +٢) ⩾ ٠

∴ (م$_{٢}$) نوجد قيم س التى تجعل ر(س) فى مجال د = ع ـ] ـ٢ ، ٢[

مجال الدالة (د ○ ر) (س) = م$_{١}$ ∩ م$_{٢}$ = ع ∩ ع ـ] ـ٢ ، ٢[= ع ـ] ـ٢ ، ٢[

• (د ○ ر) (٢) = $\sqrt{س^{٢} ـ ٤}$ = $\sqrt{٤ ـ ٤}$ = صفر

مثـــ١٥ــال :إذا كانت د(س) = $\sqrt{س ـ ٣}$ ، ر(س) = $\sqrt{٥ ـ س}$

فأوجد مجال الدالة (د ○ ر) (س)

الحـــــــــــــل

(د ○ ر) (س) = د (ر (س)) = د ($\sqrt{٥ ـ س}$) = $\sqrt{\sqrt{٥ ـ س} ـ٣}$

ر(س) = $\sqrt{٥ ـ س}$ بوضع ٥ ـ س ⩾ ٠ ⟸ المجال م$_{١}$ =] ـ ∞ ، ٥]

بوضع $\sqrt{٥ ـ س}$ ـ٣ ⩾ ٠ ⟸ $\sqrt{٥ ـ س}$ ⩾ ٣ نتربيع الطرفين

٥ ـ س ⩾ ٩ ⟸ ـ س ⩾ ٤

∴ (م$_{٢}$) نوجد قيم س التى تجعل ر(س) فى مجال د =] ـ ا ، ٤]

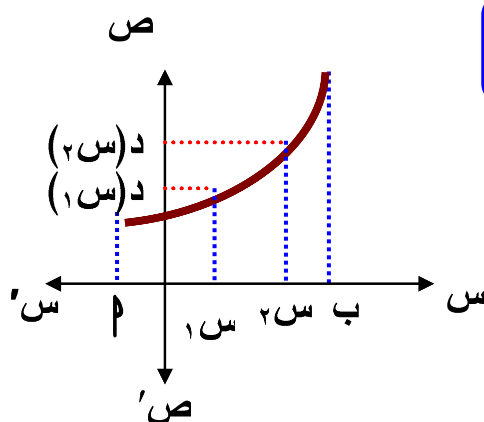
مجال الدالة (د ○ ر) (س) = م$_{١}$ ∩ م$_{٢}$ =] ـ ∞ ، ٥] ∩] ـ ∞ ، ٤] =] ـ ∞ ، ٤]

اطراد الدوال

(١) يقال للدالة د إنها تزايدية فى الفترة [٢ ، ب]

إذا كان : $س_٢ > س_١ \Leftarrow$ د $(س_٢) >$ د $(س_١)$

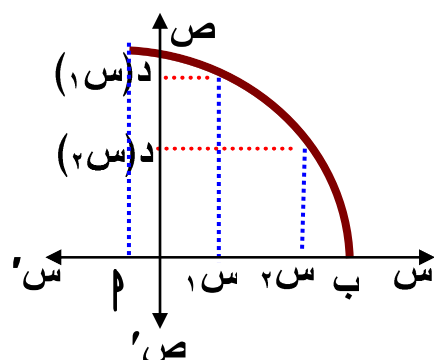
لكل $س_١$ ، $س_٢ \in$ [٢ ، ب]



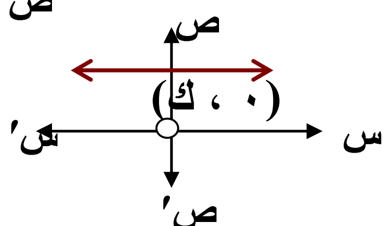
(٢) يقال للدالة د إنها تناقصية فى الفترة [٢ ، ب]

إذا كان : $س_٢ > س_١ \Leftarrow$ د $(س_٢) <$ د $(س_١)$

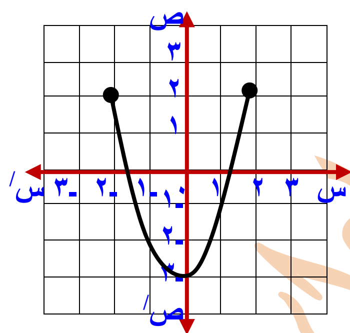
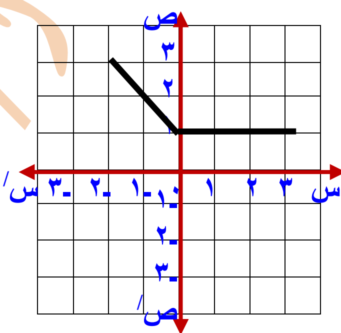
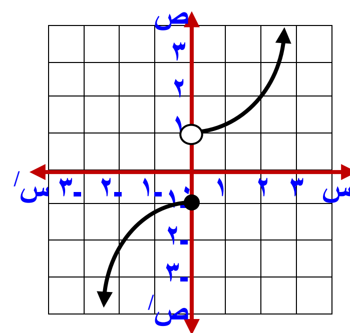
لكل $س_١$ ، $س_٢ \in$ [٢ ، ب]



(٣) يقال للدالة د إنها ثابتة فى الفترة [٢ ، ب]
إذا كان : د (س) = ك مقدار ثابت
لكل س $\in$ [٢ ، ب]

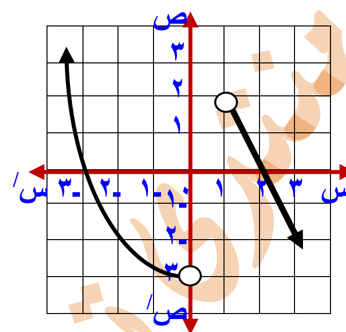
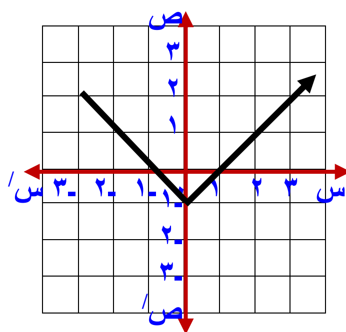
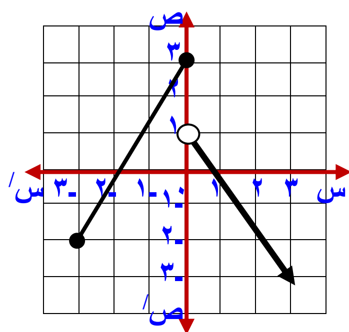


مثـــال١٦ : من الرسم البيانى اذكر المجال والمدى وابحث اطرادها

المجال = [ـ٢ ، ٢] المدى = [ـ٣ ، ٢] الدالة تناقصية فى] ـ٢ ، ٠ [الدالة تزايدية فى] ٠ ، ٢ [	المجال = ع ـ {٠} ، المدى =]١ ، ٣] الدالة تناقصية فى] ـ٢ ، ٠ [الدالة ثابتة فى] ٠ ، ٣ [	المجال = ع ، المدى = ع ـ [١ ، ـ١] الدالة تزايدية فى] ـ∞ ، ٠ [الدالة تزايدية فى] ٠ ، ∞ [

مثـــــــال ١٧ :عين مجال ومدى كل من الدوال الممثلة

المجال = ع المدى = ع ـ [٠، ١ [الدالة تزايدية فى] ـ∞ ، ٠ [الدالة تناقصية فى] ١ ، ∞ [	المجال =] ـ٣ ، ∞ [المدى = [١ ، ∞ [الدالة تناقصية فى] ـ∞،٠ [الدالة ثابتة فى] ٠ ، ∞ [	المجال =] ـ٣ ، ∞ [المدى =] ـ∞ ، ٣] الدالة تزايدية فى] ـ٣ ، ٠ [الدالة تناقصية فى] ٠ ، ∞ [

الدالة الزوجية والدالة الفردية

(١) إذا كان د(- س) = د(س) تكون الدالة زوجية

ويكون منحناها متماثلاً حول محور الصادات

مثل : د(س) = س^{٢} ، د(س) = جتا س ، د(س) = ٢ ، د(س) = س^{٤}

(٢) إذا كان د(- س) = - د(س) تكون الدالة فردية

ويكون منحناها متماثلاً حول نقطة الأصل

مثل : د(س) = س ، د(س) = جا س ، د(س) = ظا س ، د(س) = جا س

(٣) معظم الدوال لازوجية ولافردية إذا كانت : د(ـ س) X د(س) أ، د(ـ س)Xـ د(س)

(٤) عند بحث نوع الدالة د يجب تحقق شرط انتماء العنصرين س ، ـ س إلى المجال

(٥) د(س) = ٢ س^{ن} تكون زوجية إذا كان ن عدد زوجى ، فردية إذا كان ن عدد فردى

(٦) جا (- س) = - جا س ، جتا(- س)= جتا س ، ظا(- س) = - ظا س

(٥) إذا كان : الدالة فردية (ف) أو الدالة زوجية (ز) فإن (ز ± ز) دالة زوجية

، (ف ± ف) دالة فردية ، (ز ± ف) دالة ليست زوجية ولا فردية

مثـــال ١٨: ابحث نوع الدوال الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك:

(أ) د(س) = $\frac{\text{جا س}}{\text{س}}$ (ب) د(س) = س^{٢} جا س + س

(جـ) د(س) = س جتا ٥س ظا س + جا^{٢} س

الحـــــــل

(أ) د(ـ س) = $\frac{\text{جا (ـ س)}}{\text{ـ س}}$ = $\frac{\text{ـ جا س}}{\text{ـ س}}$ = $\frac{\text{جا س}}{\text{س}}$ = د(س) ∴ الدالة زوجية

(ب) د(ـ س) = (ـ س)^{٢} جا(ـ س) + (ـ س)

= س^{٢} × (ـ جا س) ـ س = ـ س^{٢} جا س ـ س

= ـ (س^{٢} جا س + س) = ـ د(س) ∴ الدالة فردية

(جـ) د(- س) = (ـ س) جتا(ـ ٥س) ظا(ـ س) + [جا(ـ س)]^{٢}

= (ـ س) جتا ٥س (ـ ظا س) + [ـ جا س]^{٢}

= س جتا ٥س ظا س + جا^{٢} س = د(س) ∴ الدالة زوجية

مثـــال ١٩: ابحث نوع الدوال الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك:

(أ) د(س) = $\frac{\text{س}^{٣}\text{ جا ٣س}}{\text{١ + س}}$ (ب) د(س) = $\frac{٥}{٥^{\text{س}}}$ + ٥ × (٥)$^{\text{س}}$

(جـ) د(س) = $\left(\frac{\text{١ + س}}{\text{١ ـ س}}\right)^{٧}$ + $\left(\frac{\text{١ ـ س}}{\text{١ + س}}\right)^{٧}$

الحـــــــل

(أ) د(- س) = $\frac{(\text{ـ س})^{٣}\text{ جا (ـ ٣س)}}{\text{١ + (ـ س)}}$ = $\frac{\text{ـ س}^{٣}\text{ ×(ـ جا ٣س)}}{\text{١ ـ س}}$

= $\frac{\text{ـ س}^{٣}\text{ × جا ٣س}}{\text{١ ـ س}}$ X د(س) ، د (ـ س) X ـ د(س)

∴ الدالة ليست زوجية ولا فردية

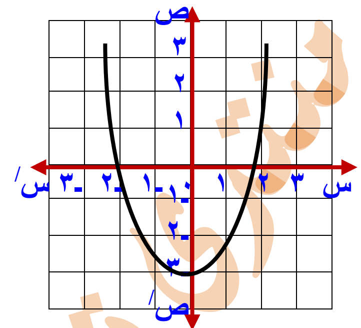
(ب) د(- س) = $\frac{٥}{(٥)^{\text{ـ س}}}$ + ٥ × (٥)$^{\text{ـ س}}$ = ٥ × (٥)$^{\text{س}}$ + $\frac{٥}{٥^{\text{س}}}$ = د(س)

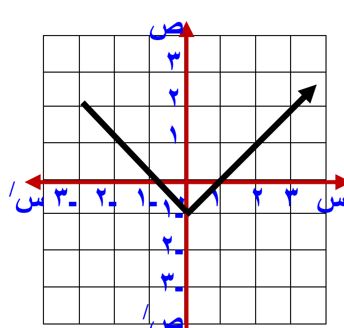
∵ د (س) = د (ـ س) ∴ الدالة زوجية

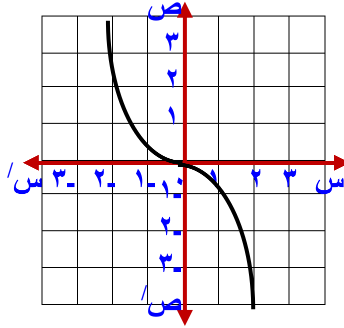
(جـ) د(- س) = $\left(\frac{\text{١ ـ(ـ س)}}{\text{١+(ـ س)}}\right)^{٧}$ + $\left(\frac{\text{١+ (ـ س)}}{\text{١ ـ(ـ س)}}\right)^{٧}$

= $\left(\frac{\text{١ + س}}{\text{١ ـ س}}\right)^{٧}$ + $\left(\frac{\text{١ ـ س}}{\text{١ + س}}\right)^{٧}$ = د(س) ∴ الدالة زوجية

مثـــ٢٠ــال :حدد من الرسم ما إذا كانت الدالة زوجية أم فردية أم غيرذلك





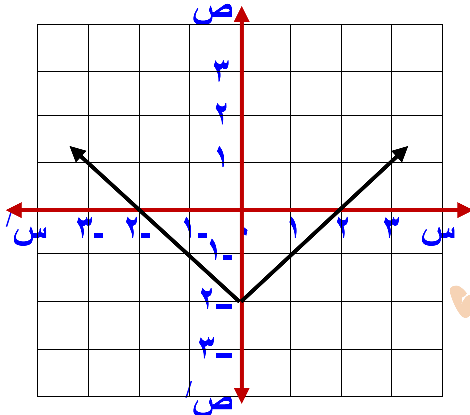


المجال = ح المنحنى متماثل حول محور الصادات ∴ الدالة زوجية	المجال =] ـ٣ ، ∞ [المنحنى ليس متماثل حول محور الصادات ولا حول نقطة الأصل ∴ الدالة ليست زوجية ولا فردية	المجال = ح المنحنى متماثل حول نقطة الأصل ∴ الدالة فردية

مثـــ٢١ــال :ارسم الدالة الآتية ومن الرسم اذكر المدى وابحث اطرادها واذكر نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك : د(س) = { س ـ ٢ ، س ⩾ ٠ ؛ - س ـ ٢ ، س < ٠

الحــــــل

س ـ ٢ : س ⩾ ٠				ـ س ـ ٢ : س< ٠			
س	٢	١	٠	س	(٠)	ـ١	ـ٢
د(س)	٠	ـ١	ـ٢	د(س)	(ـ٢)	ـ١	٠



المجال ح ، المدى = [ـ٢ ، ∞ [

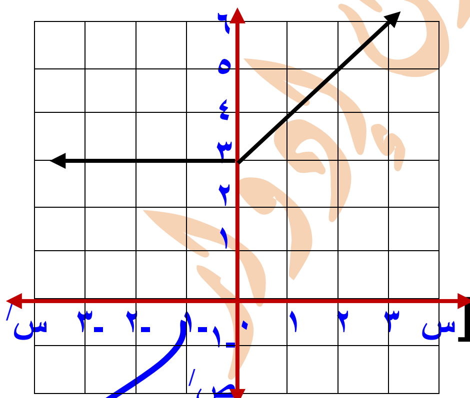
الدالة متناقصة فى]-∞ ، ٠ [، متزايدة فى] ٠ ، ∞ [

وهى دالة زوجية لأن منحناها متماثل حول محور الصادات

مثـــ٢٢ــال :ارسم الدالة الآتية ومن الرسم اذكر المدى وابحث اطرادها واذكر نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك : د(س) = { س + ٣ ، س >٠ ؛ ٣ ، س ⩽ ٠

الحــــــل

س+٣ : س > ٠				٣ : س ⩽ ٠			
س	٢	١	(٠)	س	٠	ـ١	ـ٢
د(س)	٥	٤	(٣)	د(س)	٣	٣	٣



المجال ح ، المدى = [٣ ، ∞ [

الأطراد: الدالة ثابتة فى]-∞ ، ٠[، متزايدة فى] ٠ ، ∞ [

، الدالة ليست زوجية ولافردية

الدوال الأحادية :

تعريف : الدالة د : س ⟵ ص تسمى دالة أحادية إذا كان:

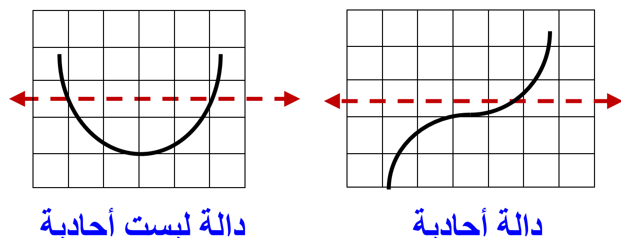
لكل ﻢ ، ب ∈ س ، د(ﻢ) = د(ب) فإن : ﻢ = ب

أ، لكل ﻢ ، ب ∈ س ، ﻢ ≠ ب فإن : د(ﻢ) ≠ د(ب)

يعنى أنه لا يوجد عنصران فى مجال الدالة الأحادية لهما نفس الصورة

اختبار الخط الأفقى

إذا وجد خط أفقى يقطع منحنى الدالة فى أكثر من نقطة فإن المنحنى لا يمثل دالة أحادية



دالة ليست أحادية   دالة أحادية

ملاحظة: الدوال الزوجية بصفة عامة ليست دوال أحادية حيث د(ﻢ) = د(-ﻢ)

مثـــ٢٣ـــال:فى كل من الدوال حدد ما إذا كانت الدالة أحادية أم لا مع توضيح السبب

(أ) د(س) = ٣س + ١   (ب) د(س) = س^{٢} + ٥   (جـ) د(س) = $\frac{٢س - ٣}{٣س + ٢}$

الحـــل

(أ) بفرض : ﻢ ، ب ∈ مجال الدالة

∵ د(ﻢ) = ٣ﻢ +١ ، د(ب) = ٣ب +١ وبوضع د(ﻢ) = د(ب)

∴ ٣ ﻢ +١ = ٣ب +١ ⟸ ٣ ﻢ = ٣ب ∴ ﻢ = ب الدالة أحادية

(ب) بفرض : ﻢ ، ب ∈ مجال الدالة

∵ د(ﻢ) = ﻢ^{٢} +٥ ، د(ب) = ب^{٢} + ٥ وبوضع د(ﻢ) = د(ب)

∴ ﻢ^{٢} +٥ = ب^{٢} + ٥ ⟸ ﻢ^{٢} = ب^{٢} ∴ ﻢ = ± ب الدالة ليست أحادية

(جـ) بفرض : ﻢ ، ب ∈ مجال الدالة

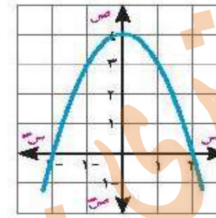
∵ د(ﻢ) = $\frac{٢ﻢ - ٣}{٣ﻢ + ٢}$ ، د(ب) = $\frac{٢ب - ٣}{٣ب + ٢}$ وبوضع د(ﻢ) = د(ب)

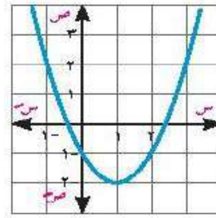
∴ $\frac{٢ﻢ - ٣}{٣ﻢ + ٢}$ = $\frac{٢ب - ٣}{٣ب + ٢}$ ⟸ ~~٦ﻢب~~ + ٣ ﻢ - ٩ب - ~~٦~~ = ~~٦ﻢب~~ - ٩ﻢ + ٤ب - ~~٦~~

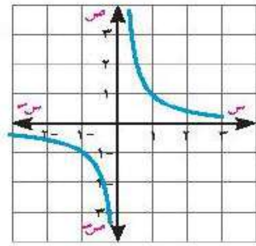
⟸ ١٣ ﻢ = ١٣ ب ∴ ﻢ = ب ∴ الدالة أحادية

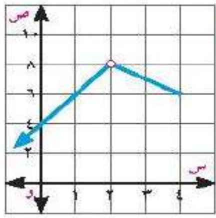
تمـــــــــــارين

١ استنتج من الشكل البيانى مجال الدالة ومداها فى كل ممايأتى:

أ 

ب 

ج 

د 

٢ إذا كانت د : [-٢ ، ٦] ⟵ ح

د(س) = { ٤ - س عندما -٢ ⩽ س < ١ ، س عندما ١ ⩽ س ⩽ ٦ }

ارسم الشكل البياني للدالة د ، واستنتج من الرسم مدى الدالة وابحث اطرادها.

٣ باستخدام أحد البرامج الرسومية ؛ ارسم منحنى الدالة د فى كل من مايأتى ، ومن الرسم استنتج مدى الدالة وابحث اطرادها.

أ د(س) = س^{٢} - ٥ ب د (س) = ٤ - س^{٢} ج د(س) = (س -١)^{٢} + ١

٤ في كل من الدوال المعرفة كما يلى حدد ما إذا كانت الدالة المعطاة أحادية أم لا ، مع توضيح السبب.

أ د(س) = ٣ س + ١ ب د (س) = $\frac{\text{٢س + ١}}{\text{س - ٢}}$ ج د(س) = س^{٢} + ١

٥ إذا كانت د ، ر دالتين حقيقيتين حيث د(س) = (٣ - س)^{٢} ، ر(س) = (٣ + س)^{٢}

بين أى الدوال الآتية فردية وأيها زوجية وأيها غير ذلك

أ د + ر ب $\frac{\text{د}}{\text{ر}}$ ج د . ر

٦ باستخدام أحد البرامج الرسومية ؛ ارسم منحنى الدالة د فى كل من مايأتى ، ومن الرسم استنتج مدى الدالة وابحث اطرادها.

أ د (س) س^{٣} ب د(س) = س^{٣} - ٣س ج د(س) $\frac{\text{-١}}{\text{س - ٢}}$

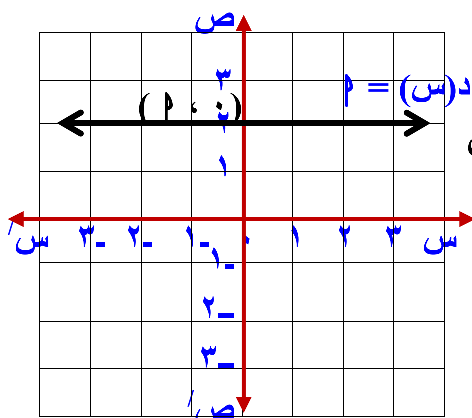
٧ ابحث نوع الدالة د من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

أ د(س) = س^{٤} + س^{٢} - ١ ب د (س) = ٣ س - ٤ س^{٣} ج د (س) = ٥

د د(س) = س^{٢} - ٣س هـ د (س) = $\frac{\text{س}^{٣}\text{ + ٢}}{\text{س - ٣}}$ و د(س) = س حتا س

التمثيل البيانى للدوال و التحويلات الهندسية

أولاً : دوال كثيرات الحدود



[١] الدالة الثابتة: الصورة العامة هى: د (س) = ٢ : ٢ ثابت

وتمثل بيانياً بمستقيم يوازى محور السينات

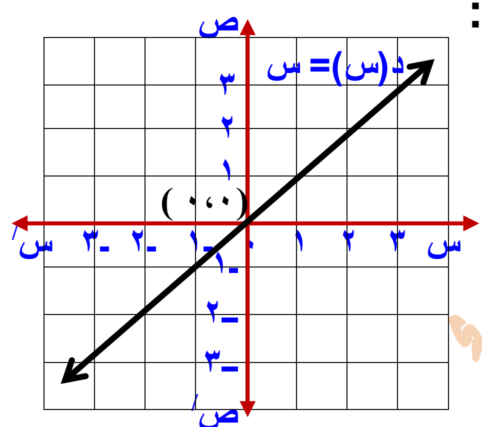
ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، ٢)

كما فى الشكل

* مجاله = ح ، مداها = { ٢ }

الدالة زوجية (متماثلة حول محور الصادات)

[٢] الدالة الخطية: أبسط صورة لدالة الدرجة الأولى هى:



• د : ح ⟵ ح ، د (س) = س وتمثل بيانياً

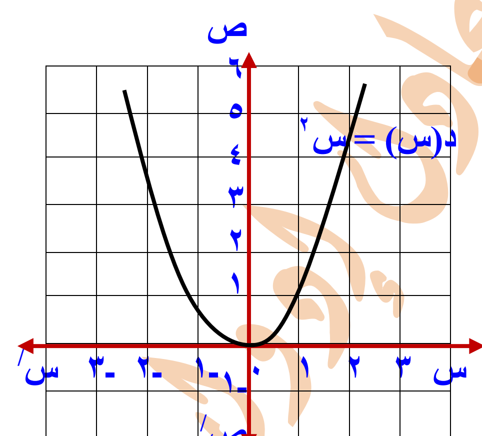
بخط مستقيم يمر بنقطة الأصل (٠،٠) ميله = ١

* مجالها = ح ، مداها = ح

* الدالة تزايدية على مجالها ح

* الدالة فردية (متماثلة حول نقطة الأصل)

[٣] الدالة التربيعية : أبسط صورة للدالة التربيعيةهى:



• د : ح ⟵ ح ، د (س) = س^{٢}

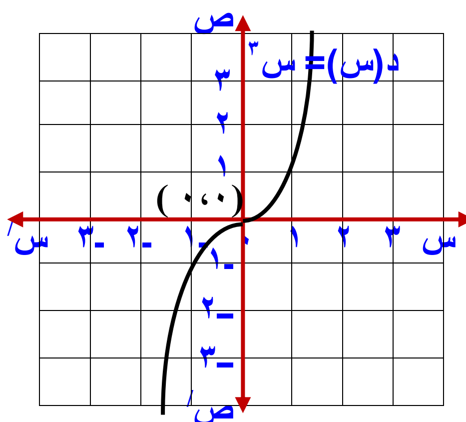
وتمثل بيانياً بمنحنى مفتوح لأعلى

* مجالها = ح ، مداها = [٠ ، ∞[

* الدالة تناقصية فى]ـ∞ ، ٠] ، تزايدية فى [٠،∞[

* الدالة زوجية (متماثلة حول محور الصادات)

[٤] الدالة التكعيبية : أبسط صورة للدالة التربيعيةهى:



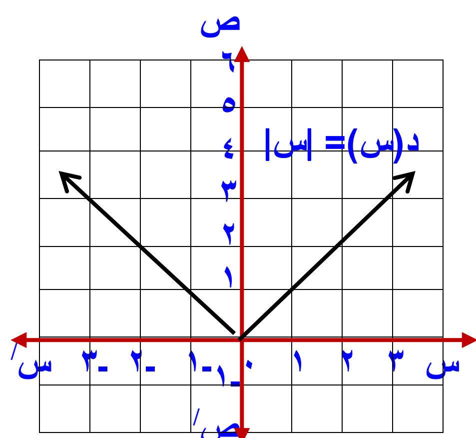
• د : ع ⟵ ع ، د (س) = $س^٣$ وتمثل بيانياً

بمنحنى متماثل حول نقطة الأصل (٠،٠) الدالة فردية

* مجال الدالة = ع ، مدى الدالة = ع

* ، تزايدية فى على مجالها ع

ثانياً : دالة المقياس



أبسط صورة لدالة المقياس هى:

• د : ع ⟵ ع ، د (س) = | س |

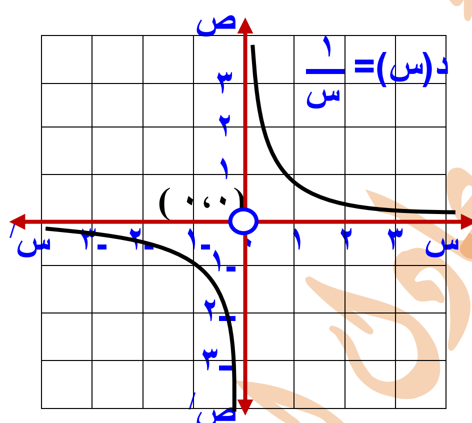
د (س) = { س : س ⩾ ٠ ، ـ س : س < ٠ }

* مجالها = ع ، مداها = [٠ ، ∞[

* الدالة تناقصية فى] ـ∞ ، ٠] ، تزايدية فى [٠ ، ∞[

* الدالة زوجية (متماثلة حول محور الصادات)

ثانياً : الدالة الكسرية



أبسط صورة لدالة المقياس هى:

• د : ع ـ {٠} ⟵ ع ، د (س) = $\frac{١}{س}$

تمثل بمنحنى من جزئين أحداهما فى الربع الأول

والآخر فى الربع الثالث دون أن يقطعا المحورين

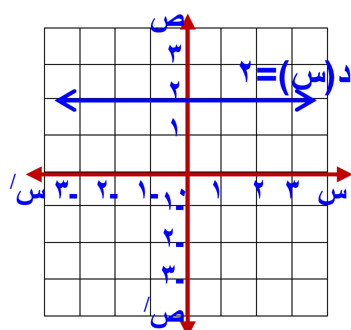
س↔س/ , ص↔ص/ ومتماثل حول نقطة الأصل (٠،٠)

* مجالها = ع ـ {٠} ، مداها = ع ـ {٠}

* الدالة تناقصية فى] ـ∞ ، ٠ [، تناقصية فى] ٠ ، ∞[

* الدالة فردية (متماثل حول نقطة الأصل)

مثــ١ــال: ارسم الدالة د(س) = ٢ ومن الرسم اذكر المدى وابحث اطرادها واذكر نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

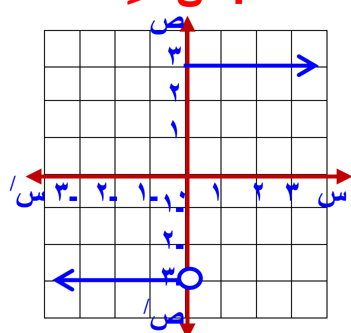


الحـــــل

المجال ع ، المدى = { ٢ }

الدالة ثابتة ، الدالة زوجية (متماثلة حول محور الصادات)

مثــ٢ــال:ارسم الدالة الآتية ومن الرسم اذكر المدى وابحث اطرادها واذكر نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك : د(س) = { -٣ : س < ٠ ، ٣ : س ⩾ ٠



الحـــــل

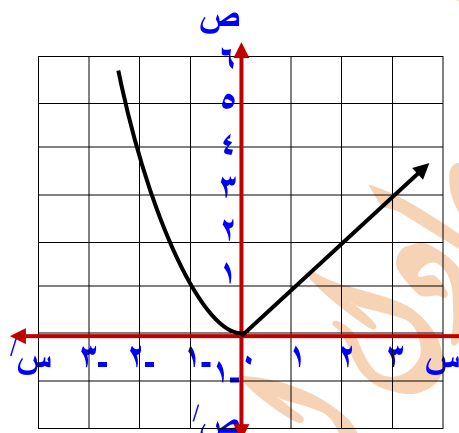
المجال ع ، المدى = {-٣ ، ٣ }

الدالة ثابتة فى] – ∞ ، ٠[، فى [٠ ، ∞ [

الدالة ليست زوجية ولافردية

مثــ٣ــال:ارسم الدالة الآتية ومن الرسم اذكر المدى وابحث اطرادها واذكر نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك : د(س) = { س : س < ٠ ، $س^٢$: س ⩾ ٠

الحـــــل



الدالة معرفة بقاعدتين

د١ (س) = س : س ∋] ٠ ، ∞ [يمثلها دالة خطية

بخط مستقيم يمر بالنقطة(٠،٠) وميله = ١

د٢ (س) = $س^٢$:س ∋] – ∞ ، ٠] يمثلها دالة تربيعية

بخط منحنى مفتوح لأعلى

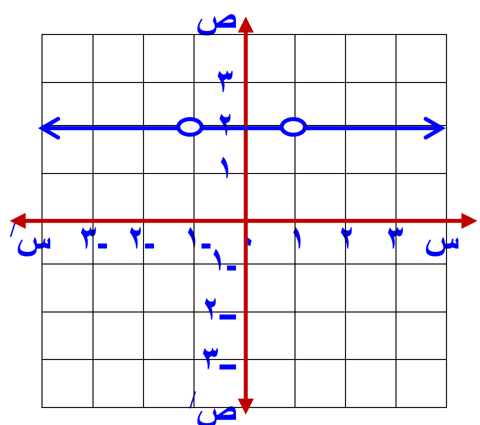
المجال ح ، المدى = [٠ ، ∞ [

الأطراد : الدالة تناقصية فى]- ∞ ، ٠] ، الدالة تزايدية فى]٠ ، ∞ [

الدالة ليست زوجية ولافردية

مثـــ٤ـــال: ارسم د(س) = $\frac{٢ س^٢ - ٢}{س^٢ - ١}$

حيث س ≠ ± ١ مع ذكر المجال والمدى واذكر نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :



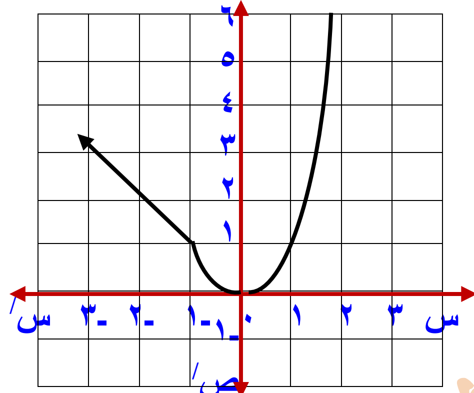
الحـــــــــــل

د(س) = $\frac{٢ (س^٢ - ١)}{(س^٢ - ١)}$ = $\frac{٢ (س - ١) (س + ١)}{(س - ١) (س +١)}$ = ٢

مجال د = ع - { -١ ، ١ }

مدىالدالة = { ٢ } ، الدالة زوجية

مثـــ٥ـــال:ارسم الدالة الآتية ومن الرسم اذكر المدى وابحث اطرادها واذكر نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك : د(س) = { $س^٣$: س > ١ ، |س| : س ≤ ١ }



الحـــــــــــل

الدالة معرفة بقاعدتين

$د_١$ (س) = $س^٣$: س ∈] ١ ، ∞ [يمثلها دالة تكعيبية

$د_٢$ (س) = |س| : س ∈] - ∞ ،١]

حسب تعريف دالة المقياس د(س) = - س

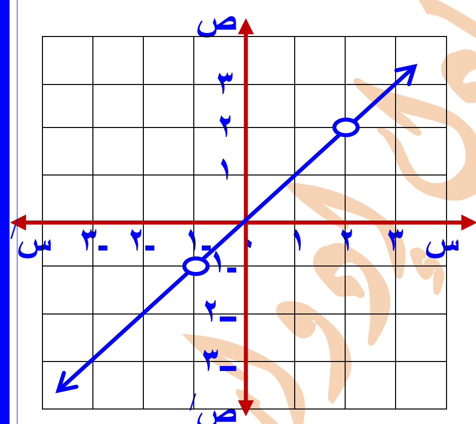
المجال ع ، المدى = [٠ ، ∞ [

الأطراد : الدالة تناقصية فى] - ∞ ،-١] ، تناقصية فى]-١ ، ٠] ، تزايدية فى]٠ ، ∞ [

الدالة ليست زوجية ولافردية

مثـــ٦ـــال: ارسم د(س) = $\frac{س^٣ - س^٢ + ٢س}{س^٢ - س +٢}$

: س ≠ ٢ ، -١ مبيناً المجال والمدى وابحث اطرادها



الحـــــــــــل

د(س) = $\frac{س (س - ٢) (س + ١)}{(س - ٢) (س +١)}$ = س

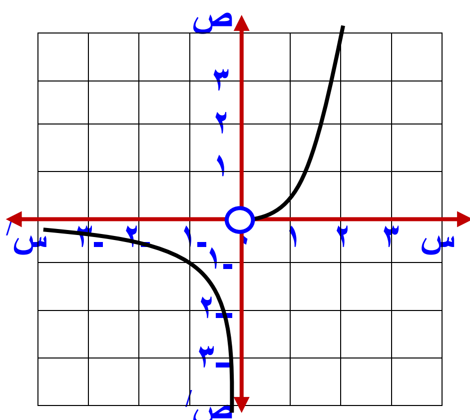
المجال = ع - { ٢ ، -١} ، المدى = ع - { ٢ ، -١}

د متزايدة على مجالها

الدالة ليست زوجية ولافردية

مثـــ٧ـــال: ارسم الدالة الآتية ومن الرسم اذكر المدى وابحث اطرادها واذكر نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك : د(س) = { س^{٢} : س > ٠ ، $\frac{١}{س}$: س < ٠ }

الحـــــــــل



الدالة معرفة بقاعدتين

د$_{١}$ (س) = س^{٢} : س ∋] ٠ ، ∞ [يمثلها دالة تربيعية

بخط منحنى مفتوح لأعلى

د$_{٢}$ (س) = $\frac{١}{س}$: س ∋] ـ ∞ ، ٠ [دالة كسرية

تمثل بمنحنى فى الربع الثالث دون أن يقطعا المحورين

المجال ع ـ {٠} ، المدى = ع ـ {٠}

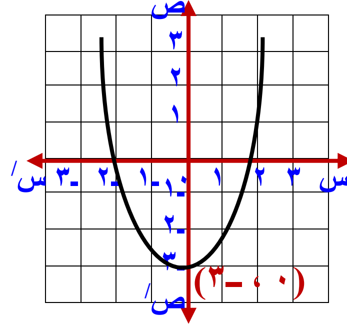
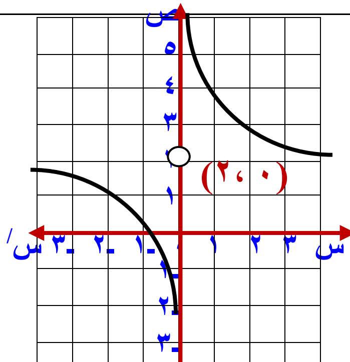
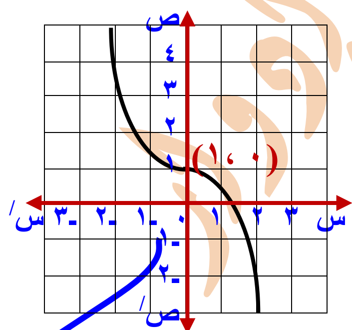
الأطراد : الدالة تناقصية فى] ـ ∞ ، ٠ [، الدالة تزايدية فى] ٠ ، ∞ [

الدالة ليست زوجية ولا فردية

التحويلات الهندسية لمنحنيات الدوال

أولا : الإزاحة الرأسية لمنحنى الدالة

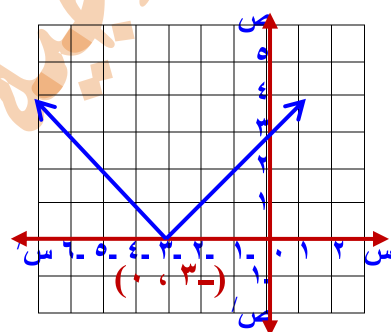
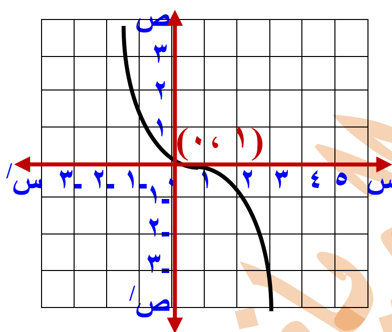
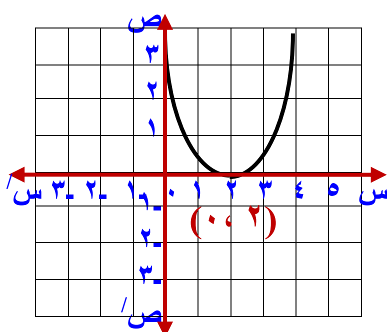
لأى دالة د يكون المنحنى ص = د(س) + ؏ ، ؏ ∋ ع ـ {٠} هو نفس المنحنى ص = د(س) بإزاحة رأسية قدرها |؏| فى اتجاه : { و ص ← : ؏ > ٠ ، و ص/ : ؏ < ٠ }

منحنى ص = س^{٢} ـ ٣ هو نفسه منحنى ص = س^{٢} بإزاحة رأسية قدرها ٣ فى اتجاه و ص/ (السالب)	منحنى ص = ١\س ـ ٣ هو نفسه منحنى ص = ١\س بإزاحة رأسية قدرها ٢ فى اتجاه و ص (الموجب)	منحنى ص = س^{٣} + ١ هو نفسه منحنى ص = س^{٣} بإزاحة رأسية قدرها ١ فى اتجاه و ص (الموجب)
		

ثانيا : الإزاحة الأفقية لمنحنى الدالة

لأى دالة د يكون المنحنى ص = د(س + ب) ، ب ∋ ح ـ {٠} هو نفس المنحنى

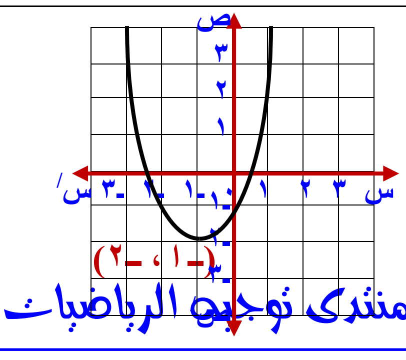
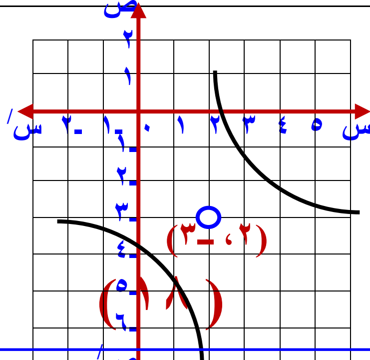
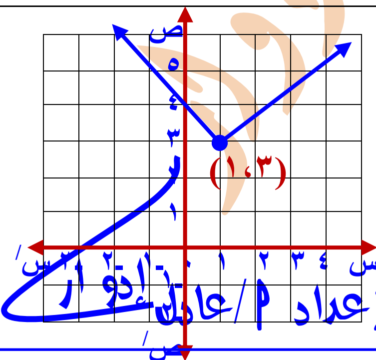
ص = د(س) بإزاحة أفقية قدرها | ب | فى اتجاه : { و س← : ب < ٠ ، و س′← : ب > ٠ }

منحنى ص = | س+٣ | هو نفسه منحنى ص = | س | بإزاحة أفقية قدرها ٣ فى اتجاه و س′ (السالب)	منحنى ص = $(س-١)^٣$ هو نفسه منحنى ص = $س^٣$ بإزاحة أفقية قدرها ١ فى اتجاه و س (الموجب)	منحنى ص = $(س-٢)^٢$ هو نفسه منحنى ص = $س^٢$ بإزاحة أفقية قدرها ٢ فى اتجاه و س (الموجب)
		
نقطة تماثل (-٣، ٠) ، المدى [٠، ∞ [الاطراد: تناقصية فى] -∞ ، ٠] تزايدية فى]٠ ، ∞[	نقطة تماثل (١ ، ٠) ، المدى = ح الدالة تناقصية على مجالها	نقطة تماثل (٢ ، ٠) ، المدى [٠، ∞ [الاطراد: تناقصية فى] -∞ ، ٢] تزايدية فى]٢ ، ∞[

ثالثا : لأى دالة د يكون المنحنى ص = د(س + أ) + ب ، أ، ب ∋ ح ـ {٠} هو نفس

المنحنى ص = د(س) بإزاحة رأسية قدرها | أ | فى أتجاه { و س← عندما أ > ٠ ، و س′← عندما أ < ٠ }

ثم إزاحة رأسية مقدارها | ب | فى اتجاه { و ص← عندما ب > ٠ ، و ص′← عندما ب < ٠ }

منحنى ص = $(س+١)^٢$ ـ ٢ هو نفسه منحنى ص = $س^٢$ بإزاحة رأسية قدرها |٢| و ص′ بإزاحة أفقية قدرها |١| و س′	منحنى ص = $\frac{١}{س-٢}$ ـ ٣ هو نفسه منحنى ص = ١\س بإزاحة رأسية قدرها |٣| و ص′ بإزاحة أفقية قدرها |٢| و س	منحنى ص = |س ـ ١| +٣ هو نفسه منحنى ص = |س| بإزاحة رأسية قدرها |٣| و ص بإزاحة أفقية قدرها |١| و س
		

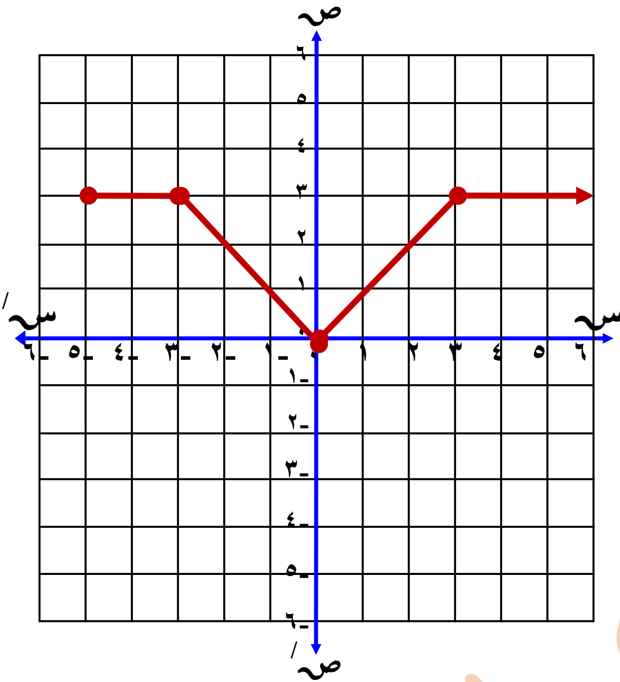
منتدى توجيه الرياضيات
إعداد / أ عادل إدوار

رابعا : لأى دالة د يكون المنحنى ص = ٩ د(س) حيث ٩ ∈ ع⁺

- تمدد رأسى للمنحنى إذا كان ٩>١ ، أنكماش رأسى للمنحنى إذا كان ٩ <١

مثـــ١ـــال: ارسم الشكل البياني للدالة : د(س) = { ٣ ، -٥ ≤ س < -٣ ؛ |س| ، -٣ ≤ س ≤ ٣ ؛ ٣ ، س > ٣ }

مع ذكر المجال والمدى ، ابحث اطرادها وبين أنها دالة زوجية .



الحـــــــل

د١ : دالة ثابتة د(س) = ٣ فى [-٥ ، -٣ [

د٢ : دالة مقياس د(س) = { س : ٠ ≤ س ≤ ٣ ؛ -س : -٣ ≤ س < ٠ }

د٣ : دالة ثابتة د(س) = ٣ فى]٣ ، ∞ [

المجال = [-٥ ، ∞[، المدى = [٠ ، ٣]

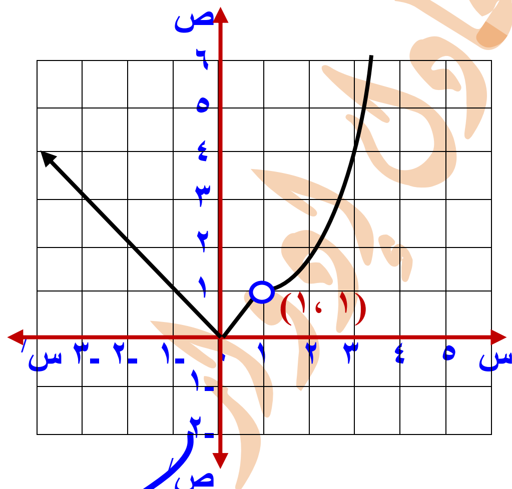
ثابتة فى [-٥ ، -٣[، د متناقصة فى [-٣ ، ٠[

، تزايدية فى [٠ ، ٣] ، ثابتة فى] ٣ ، ∞[

الدالة ليست زوجية وليست فردية

مثـــ٢ـــال: ارسم منحنى الدالة د(س) = { |س - ١| : س < ١ ؛ س² - ١ : س > ١ }

اذكر المجال والمدى وبين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية ، وابحث اطرادها :



الحـــــــل

د١: دالة مقياس د = { س – ١ : س ∈] – ∞ ، ٠] ؛ – س – ١ : س ∈]٠ ، ١[}

د٢: دالة تربيعية بإزاحة مقدارها |١| فى اتجاه و س←

المجال = ع – {١} ، المدى =] ٠ ، ∞ [

الدالة متناقصة فى] – ∞ ، ٠]

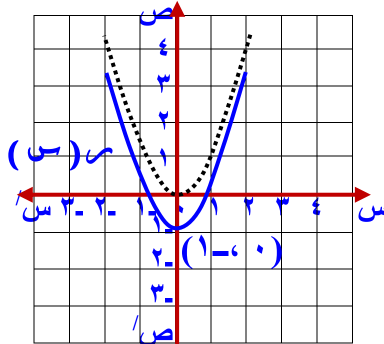
تتزايد فى] ٠ ، ١ [، تتزايد فى] ١ ، ∞ [

مثـــ٣ـــال: ارسم منحنى الدالة د(س) = س^{٢} لتمثيل الدوال ر ، ه ، هـ حيث

أ ر(س) = س^{٢} ـ ١ ب ه(س) = (س ـ ٣)^{٢} جـ هـ(س) = ٢ ـ س^{٢}

ومن الرسم حدد مجال ومدى الدالة وابحث اطرادها

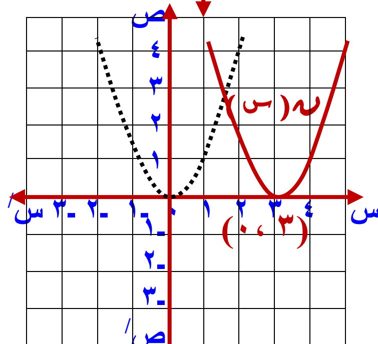
الحـــــــــــــــل



أ ر(س) = س^{٢} ـ ١ إزاحة قدرها |١| فى اتجاه $\overleftarrow{\text{وص}'}$

رأس المنحنى (٠، ـ١) ، المدى = [ـ١ ، ∞ [

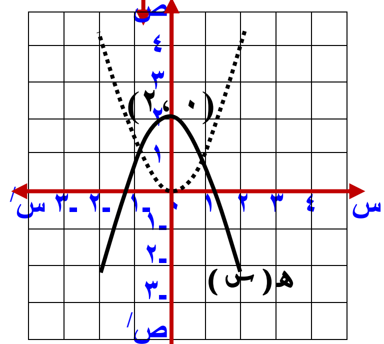
تناقصية] ـ∞، ٠[، تزايدية] ٠، ∞[



ب ه(س) = (س ـ ٣)^{٢} قدرها |٣| فى اتجاه $\overleftarrow{\text{وس}}$

رأس المنحنى (٣ ، ٠) ، المدى = [٠ ، ∞ [

تناقصية] ـ∞، ٣[، تزايدية] ٣، ∞[



جـ هـ(س) = ٢ ـ س^{٢}

إنعكاس للدالة لوجود إشارة سالب

وإزاحة قدرها |٢| فى اتجاه $\overleftarrow{\text{وص}}$

رأس المنحنى (٠ ، ٢) ، المدى =] ـ ∞ ، ٢]

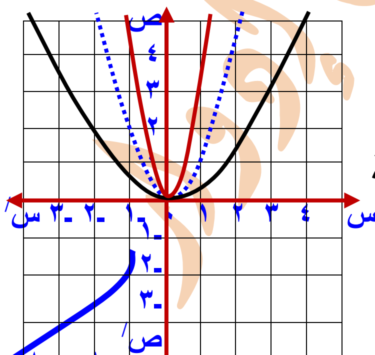
، الدالة تزايدية فى] ـ∞، ٠[، تناقصية فى] ٠، ∞[

مثـــ٤ـــال: ارسم فى شكل واحد منحنيات الدوال الآتية وعين مدى كل منها

واستنتج اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

١) د$_{١}$ (س) = س^{٢} ٢) د$_{٢}$ (س) = ٢س^{٢} ٣) د$_{٣}$ (س) = $\frac{١}{٢}$ س^{٢}

الحـــــــــــــــل



جميع الدوال نقطة رأس منحناها (٠ ، ٠)

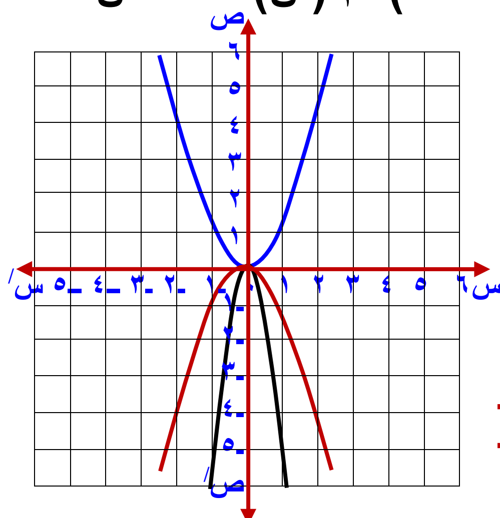
، مجالها ع ، مداها = [٠ ، ∞ [، جميع الدوال زوجية

، جميعها متناقصة فى] ـ ∞ ، ٠[، متزايدة فى] ٠ ، ∞ [

مثــ٥ــال: ارسم فى شكل واحد منحنيات الدوال الآتية وعين مدى كل منها واستنتج اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

١) د١ (س) = س٢ ٢) د٢ (س) = ـ س٢ ٣) د٣ (س) = ـ ٢ س٢

الحـــــــــــــل



جميع الدوال نقطة رأس منحناها (٠ ، ٠)

، مجالها ع ، جميع الدوال زوجية

، د١ مفتوح لأعلى مداها = [٠ ، ∞ [،

د٢ مفتوح لأسفل مداها]- ∞ ، ٠]

الدالة متزايدة فى]- ∞ ، ٠[، متناقصة فى]٠ ، ∞ [

د٣ مفتوح لأسفل مداها]- ∞ ، ٠]

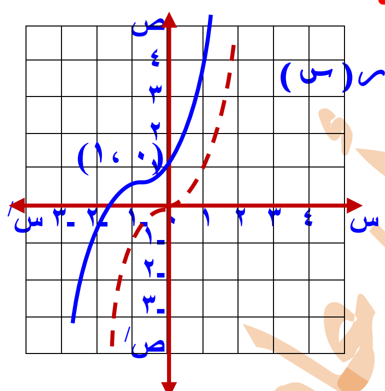
الدالة متزايدة فى]- ∞ ، ٠[، متناقصة فى] ٠ ، ∞ [

مثــ٦ــال: ارسم منحنى الدالة د(س) = س٢ لتمثيل الدوال ر ، ن ، هـ حيث

أ ر(س) = س٣ + ١ ب ن(س) = (س ـ ٢)٣ جـ هـ(س) = (س + ١)٣ + ٢

ومن الرسم حدد مجال ومدى الدالة وابحث اطرادها

الحـــــــــــــل

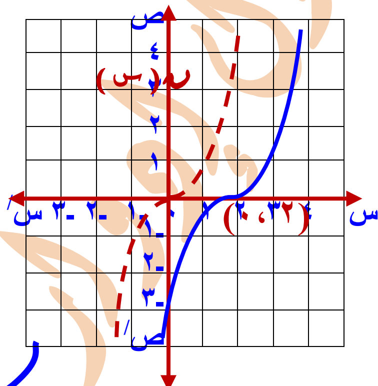


أ ر(س) = س٣ + ١

إزاحة قدرها |١| فى اتجاه وص←

رأس المنحنى النقطة (٠ ، ١) ، المدى = ع

، الدالة تزايدية على مجالها

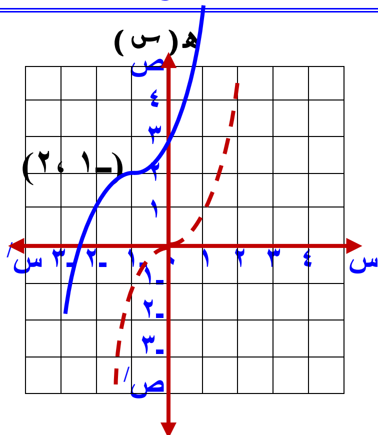


ب ن(س) = (س ـ ٢)٣

إزاحة قدرها |٢| فى اتجاه وس←

رأس المنحنى النقطة (٢ ، ٠) ، المدى = ع

، الدالة تزايدية على مجالها



ﺟ $ن(س) = (س + ١)^{٣} + ٢$

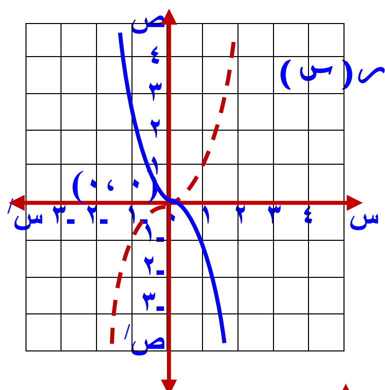
إزاحة |٢| فى اتجاه وس′ ←
وإزاحة |٢| فى اتجاه وص ←
رأس المنحنى النقطة (ـ١ ، ٢) ، المدى = ع
، الدالة تزايدية على مجالها

مثـــ٧ـــال: ارسم منحنى الدالة د(س) = س^{٢} لتمثيل الدوال ر ، ن ، هـ حيث

أ $ر(س) = ـ س^{٣}$ ب $ن(س) = ٢س^{٣} ـ ٢$ ﺟ $هـ(س) = ـ١ ـ (س + ٢)^{٣}$

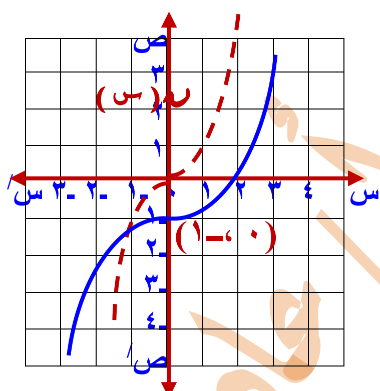
ومن الرسم حدد مجال ومدى الدالة وابحث اطرادها

الحـــــــــــل



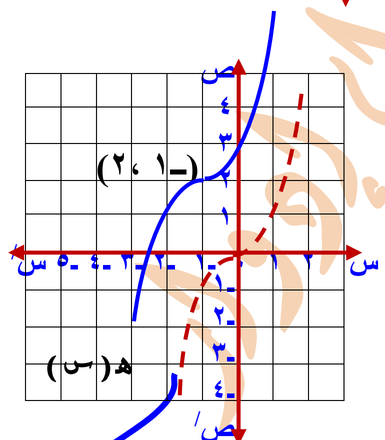
أ $ر(س) = ـ س^{٣}$

إنعكاس للدالة لوجود إشارة سالب
رأس المنحنى النقطة (٠ ، ٠) ، المدى = ع
، الدالة تناقصية على مجالها



ب $ن(س) = ٢س^{٣} ـ ١$

إزاحة قدرها |١| فى اتجاه وص′
يوجد تمدد فى الدالة
رأس المنحنى النقطة (٠ ، ـ ١) ، المدى = ع
، الدالة تزايدية على مجالها

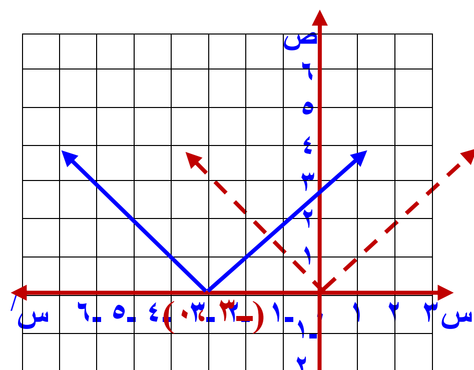


ﺟ $ن(س) = ـ١ ـ (س + ٢)^{٣}$

إنعكاس للدالة لوجود إشارة سالب
إزاحة |٢| فى اتجاه وس′ ←
وإزاحة |١| فى اتجاه وص ←
رأس المنحنى النقطة (ـ٢ ، ١) ، المدى = ع
، الدالة تناقصية على مجالها

مثـــ٨ـــال: من رسم منحنى الدالة د(س) = | س | أرسم ومن الرسم حدد مجال ومدى الدالة وابحث اطرادها ⓐ ر(س) = | س + ٣ | ⓑ ى(س) = ٥ ـ | س |

الحــــــل

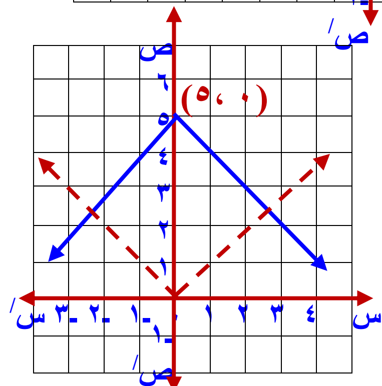


ⓐ ر (س) = | س + ٣ | دالة مقياس

بإزاحة أفقية قدرها |٣| فى اتجاه وس/

نقطة التماثل (ـ٣ ، ٠) مجال ع ، مدى [٠،∞[

تناقصية فى]ـ∞،ـ٣[، تزايدية فى]ـ٣،∞[



ⓑ ى (س) = ٥ ـ | س | دالة مقياس

إنعكاس للدالة لوجود إشارة سالب

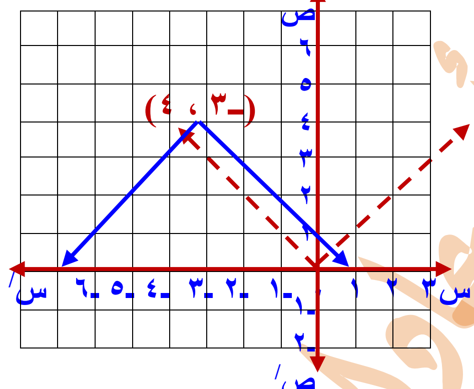
بإزاحة رأسية قدرها |٥| فى اتجاه وص

نقطة التماثل (٠ ، ٥) مجال ع، مدى]ـ ∞ ، ٥]

الدالة تزايدية فى]ـ∞،٠[، تناقصية فى]٠،∞[

مثـــ٩ـــال: من رسم منحنى الدالة د(س) = | س | أرسم ومن الرسم حدد مجال ومدى الدالة وابحث اطرادها ⓐ هـ(س) = ٤ ـ |س +٢| ⓑ ر(س) = |$\frac{1}{2}$ س + ٤|+٢

الحــــــل



ⓐ هـ (س) = ٤ ـ |س +٣| دالة مقياس

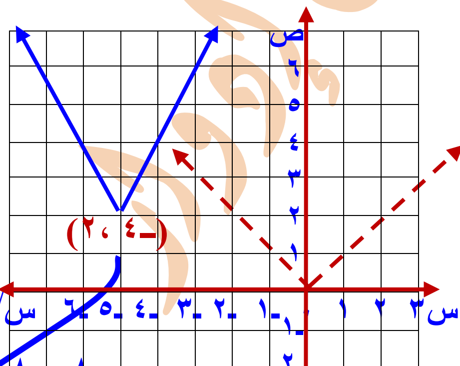
إنعكاس للدالة لوجود إشارة سالب

بإزاحة رأسية قدرها |٤| فى اتجاه وص

بإزاحة أفقية قدرها |٣| فى اتجاه وس/

نقطة التماثل (ـ٣، ٤) مجال ع ، مدى]ـ∞ ، ٤)

تزايدية فى]ـ∞،٠[،]٠،∞[



ⓑ ر (س) = | س + ٣ | دالة مقياس

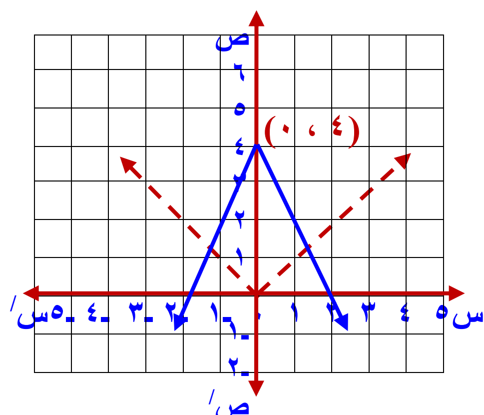
بإزاحة أفقية قدرها |٤| وس/ ، |٢| وص

نقطة التماثل (ـ٤ ، ٢) مجال ع ، مدى [٢،∞[

تناقصية فى]ـ∞،ـ٤[، تزايدية فى]ـ٤،∞[

مثـــ١٠ـــال: من رسم منحنى الدالة د(س) = | س | أرسم الدوال الآتيةثم حدد مدى الدالة وابحث اطرادها (أ) هـ(س) = ٤ ـ ٢ |س| (ب) ر(س) = $\sqrt{\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٤}$

الحــــــل



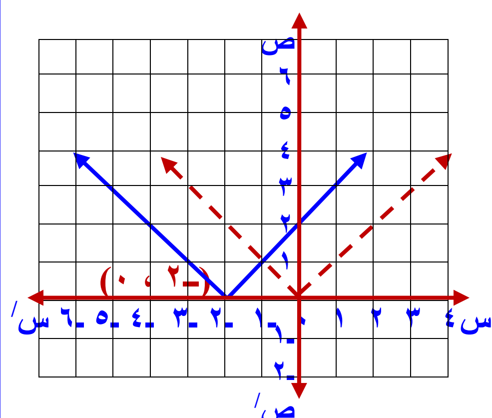
(أ) هـ (س) = ٤ ـ ٢ |س| دالة مقياس

تمدد فى منحنى الدالة و إنعكاس للدالة لوجود إشارة سالب

بإزاحة رأسية قدرها |٤| فى اتجاه $\overleftarrow{\text{وص}}$

نقطة التماثل (٤ ، ٠) مجال ع ، المدى] ـ ∞ ، ٤]

الدالة تزايدية فى] ـ∞،٠ [، تناقصية فى] ٠،∞ [



(ب) ر (س) = $\sqrt{\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٤}$ = $\sqrt{(\text{س} + ٢)^{٢}}$

ر (س) = | س + ٢ | دالة مقياس

بإزاحة أفقية قدرها |٢| فى اتجاه $\overleftarrow{\text{وس}'}$

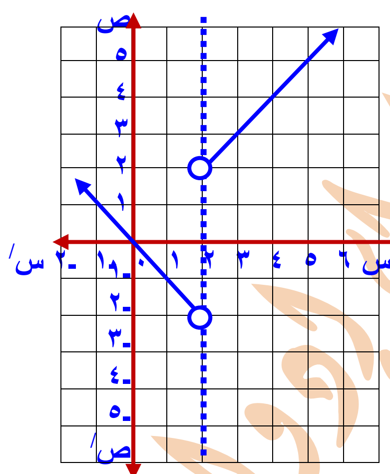
نقطة التماثل (ـ٢، ٠) مجال ع ، المدى [٠ ، ∞ [

تزايدية فى] ـ∞،٠ [،] ٠،∞ [

مثـــ١١ـــال: ارسم د(س) = $\dfrac{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢}{|\text{س} - ٢|}$ حيث س ≠ ٢

ومن الرسم عين المدى وابحث الاطراد

الحــــــل



د(س) = $\begin{cases} \dfrac{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ١)}{(\text{س} - ٢)} & \text{، س} > ٢ \\ \dfrac{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ١)}{-(\text{س} - ٢)} & \text{، س} < ٢ \end{cases}$

∴ د(س) = $\begin{cases} \text{س} + ١ & \text{، س} > ٢ \\ -\text{س} - ١ & \text{، س} < ٢ \end{cases}$

المجال = ع ـ {٢} ، المدى =]-٣ ، ∞ [

الدالة متناقصة فى]-∞ ، ٢] ، متزايدة فى] ٢ ، ∞ [

مثـــال ١٢: من رسم منحنى الدالة د(س) = $\frac{١}{س}$ أرسم الدوال الآتيةثم حدد مدى الدالة وابحث اطرادها (أ) ر(س) = $\frac{١}{س - ١}$ (ب) ى(س) = ($\frac{١}{س}$) ـ ٣

الحـــــــــل

(أ) ر (س) = $\frac{١}{س - ١}$ دالة كسرية

بإزاحة أفقية قدرها |١| فى اتجاه وس

نقطة التماثل النقطة (١ ، ٠)

مجال ع ـ {١} ، المدى ع ـ {٠}

تناقصية فى]ـ∞،١[، تناقصية فى]١،∞[

(ب) ى (س) = $\frac{١}{س}$ ـ ٣ دالة كسرية

بإزاحة رأسية قدرها |٣| فى اتجاه وص/

بإزاحة أفقية قدرها |٢| فى اتجاه وس نقطة التماثل (٢،ـ٣)

مجال ع ـ {٢} ، المدى ع ـ {ـ٣}

تناقصية فى]ـ∞،٢[، تناقصية فى]٢،∞[

مثـــال ١٣: من رسم منحنى الدالة د(س) = $\frac{١}{س}$ أرسم الدوال الآتيةثم حدد مدى الدالة وابحث اطرادها (أ) هـ(س) = $\frac{-١}{س}$ +٢ (ب) ى(س) = $\frac{١}{س - ٢}$ +٢

(أ) هـ (س) = $\frac{-١}{س}$ ـ ٢ دالة كسرية

إنعكاس للدالة لوجود إشارة سالب

بإزاحة رأسية قدرها |٢| فى اتجاه وص/

نقطة التماثل (٠ ، ٢)

مجال ع ـ {٠} ، المدى ع ـ {٢}

تزايدية فى]ـ∞،٠[، تزايدية فى]٠،∞[

ⓑ ر (س) = ($\frac{1}{س - ٢}$) ـ ٣ دالة كسرية

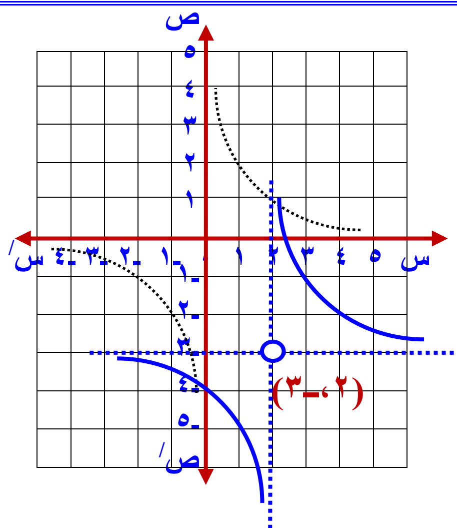
بإزاحة رأسية قدرها |٣| فى اتجاه وص/

بإزاحة أفقية قدرها |٢| فى اتجاه وس

نقطة التماثل (٢ ، ـ٣)

مجال ع ـ {٢} ، المدى ع ـ {ـ٣}

تناقصية فى]ـ∞،٢[، تناقصية فى]٢،∞[



مثــ١٤ــال: ارسم منحنى الدالة د(س) =
- $س^2$ عندما س ∈ [ـ٣ ، ٣]
- ٣ عندما س ∈] ٣ ، ٦]
- ٩ - س عندما س ∈] ٦ ، ٨]
- صفر عندما س >٨

ثم عين مدى الدالة واستنتج اطرادها

الحــــــــل

من الرسم : مدى الدالة = [٠ ، ٩]

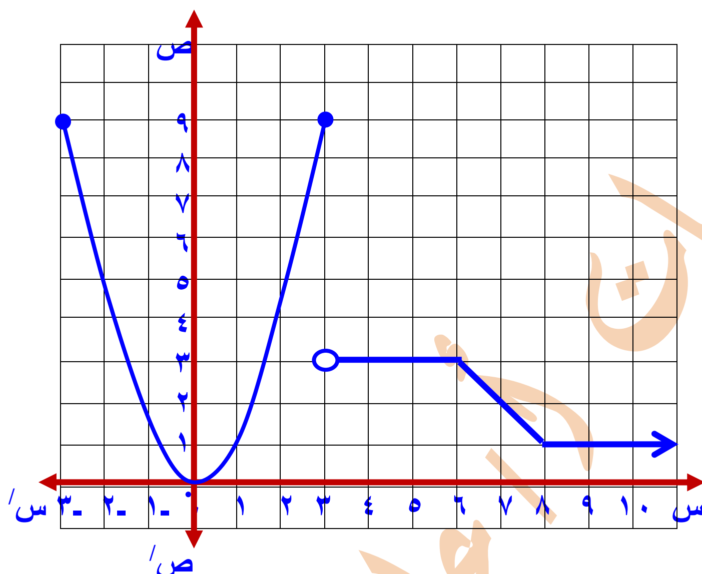
الدالة متناقصة فى [ـ٣ ، ٠] ،

الدالة متزايدة فى [٠ ، ٣]

الدالة ثابتة فى] ٣ ، ٦]

الدالة متناقصة فى [٦ ، ٨]

الدالة ثابتة فى] ٨ ، ∞ [



مثــ١٥ــال: ابحث نوع د(س) = $س^3$ | س | من حيث كونها زوجية أو فردية

الحــــــــل

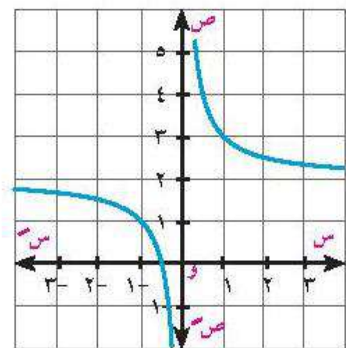
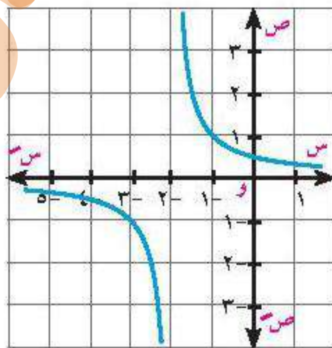
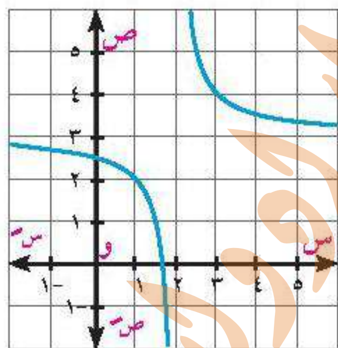
د(ـس) = $(ـس)^3$ | ـس | = ـ $س^3$ | س | = ـ د(س) ∴ الدالة فردية

مثــ١٦ــال:ابحث نوع د(س) = | ٥+ س | + | ٥ ـ س | من حيث كونها زوجية أو فردية

الحــــــــل

د(- س) = | ٥ ـ س | + | ٥+ س | = | ٥+ س |+ | ٥ ـ س | = د(س) ∴الدالة زوجية

تمـــــــارين

١	ارسم منحنى الدالة د ، ومن الرسم حدد مداها وابحث اطرادها أ د(س) = { |س| عندما س ≤ ٠ ، س² عندما س > ٠ } ب د(س) = { ٤ عندما س < -٢ ، س² عندما س ≥ -٢ }
٢	اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة: منحنى ر(س) = س² + ٤ هو نفس منحنى د(س) = س² بإزاحة مقدارها ٤ وحدات فى اتجاه: أ و س ← ب و س ← ج و ص ← د و ص ← نقطة رأس منحنى الدالة د(س) = (٢ - س)² + ٣ هي: أ (٢، ٣) ب (٢، -٣) ج (-٢، ٣) د (-٢، -٣) نقطة تماثل منحنى الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س - ٣}$ + ٤ هى: أ (٣، -٤) ب (-٣، -٤) ج (٣، ٤) د (-٣، ٤)
٣	ارسم منحنى الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س}$ ، ثم أزيح فى اتجاه محورى الإحداثيات . اكتب قاعدة كل دالة التي تمثلها المنحنيات الآتية: أ  ب  ج 

مستر تيجيه الرياضيات أ/ عادل إدوار

٤	استخدم منحنى الدالة د حيث $د(س) = س^{٢}$ لتمثيل ما يأتي بيانيًا. أ $د_{١}(س) = س^{٢} - ٤$ ب $د_{٢}(س) = (س - ٣)^{٢}$ ج $د_{٣}(س) = (س - ١)^{٢} - ٢$
٥	استخدم منحنى الدالة د حيث $د(س) = س^{٣}$. لتمثيل ما يأتي بيانيًا: أ $د_{١}(س) = د(س) - ٣$ ب $د_{٢}(س) = د\ (س - ٢)$ ج $د_{٣}(س) = د(س + ٣) + ٢$ ➢ ثم حدد نقطة التماثل لمنحنى كل دالة.
٦	إذا كانت الدالة د حيث $د(س) = \frac{١}{س}$ فارسم الشكل البيانى للدالة ق وحدد نقطة التماثل لمنحنى الدالة: أ $ق(س) = د(س - ٣)$ ب $ق(س) = د(س) + ٢$ ج $ق(س) = د(س - ٢) + ٢$
٧	استخدم منحنى الدالة د حيث $د(س) = \|س\|$ لتمثيل مايأتى بيانيًا. أ $د_{١}(س) = ٢ - \|س\|$ ب $د_{٢}(س) = -\|س + ٥\|$ ج $د_{٣}(س) = ٤ - \|س - ٢\|$ د $د_{٤}(س) = ٢\|س\|$ هـ $د_{٥}(س) = -٢\|س - ١\|$ و $د_{٦}(س) = ٥ - ٢\|س + ٢\|$
٨	ارسم منحنى الدالة د فى كل مماياتى باستخدام التحويلات المناسبة ثم ابحث اطرادها أ $د_{١}(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٢ & \text{عندما } س \geq ٠ \\ -س^{٢} - ٢ & \text{عندما } س < ٠ \end{cases}$ ب $د_{٢}(س) = \begin{cases} س^{٢} + ١ & \text{عندما } -٤ \leq س < ٠ \\ -س^{٢} - ١ & \text{عندما } ٠ \leq س \leq ٤ \end{cases}$

منتدى توجيه الرياضيات أ / عادل إدوار

الكميات المعينة وغير المعينة وغير المعرفة

(١) مفاهيم ورموز وتمهيدات

ح = مجموعة الأعداد الحقيقية =] ــ ∞ ، ∞ [

$ح^+$ = مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة =] ٠ ، ∞ [

$ح^-$ = مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة =] ــ ∞ ، ٠ [

** أنواع الكميات :

(١) الكمية المعينة : هى الكمية التى لها جواب محدد مثل : ٣ ــ ٥ ، ٩ × ٨ ، ٧ ÷ ٤

(٢) الكمية غير المعرفة : هى الكمية التى لا معنى لها مثل : $\frac{م}{صفر}$ ، م ≠ ٠

(٢) الرمزان ∞ ، ــ ∞ :

❖ الرمز ∞ يرمز لأى كمية تكون أكبر من أى عدد حقيقى موجب يمكن إدراكه

❖ الرمز ــ ∞ يرمز لأى كمية تكون أصغر من أى عدد حقيقى سالب يمكن إدراكه

❖ إذا كان : م ∈ ح فإن : ∞ ± م = ∞ ، ــ ∞ ± م = ــ ∞

، ∞ × م = { ∞ عندما م > ٠ ؛ ــ ∞ عندما م < ٠ ؛ كمية غير معينة عندما م = ٠ }

ــ ∞ × م = { ــ ∞ عندما م > ٠ ؛ ∞ عندما م < ٠ ؛ كمية غير معينة عندما م = ٠ }

منتدى توجيه الرياضيات أ/ عادل إدوار

(٣) الكمية الغير المعينة : هى الكمية التى لا نستطيع أن نجد لها جواباً محدداً حيث يكون

لها عدد لا نهائى من الحلول مثل : $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ " كمية غير معينة "

* يوجد عدد لا نهائى من الأعداد الحقيقية إذا ضربت فى صفر كان الناتج = صفراً

∵ ٠ × أى عدد = ٠ ∴ $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ = أى عدد (غير معينة)

∵ ∞ × أى عدد = ∞ ∴ $\frac{\infty}{\infty}$ = أى عدد (غير معينة)

∵ ∞ + أى عدد = ∞ ∴ ∞ − ∞ = أى عدد (غير معينة)

∵ $\frac{\text{أى عدد}}{\infty}$ = صفر ∴ ٠ × ∞ = أى عدد (غير معينة)

العامل الصفرى :

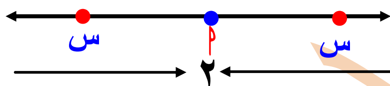
إذا كانت د دالة فى المتغير س على صورة كثيرة حدود من درجة ن وكانت

د (٢) = ٠ حيث ٢ ∈ ح فإن المقدار (س − ٢) يسمى العامل الصفرى للدالة د

وهذا يعنى أن : د (س) يقبل القسمة على (س − ٢) بدون باق

أى أن : د (س) = (س − ٢) × كثيرة حدود أخرى

** مفهوم الرمز " ⟵ " فى النهايات :



إذا تصورنا أن س نقطة تتحرك على خط الأعداد

فإن موضعها عند كل نقطة أثناء حركتها يعين عدداً حقيقياً ما .

قيل أن س تقترب من العدد ٢ من خلال قيم أكبر قليلاً من العدد ٢ تقترب ٢ من اليمين

أ، قيل أن س تقترب من العدد ٢ من خلال قيم أصغر قليلاً من العدد ٢ تقترب ٢ من اليسار

وإذا أقتربت س من العدد ٢ من جهة اليمين ومن اليسار قيل إن س تقترب من العدد ٢

ونعبر عن ذلك رمزياً بالصورة : س ⟵ ٢

منتدى توجيه الرياضيات أ / عادل إدوار

تقدّير النهاية عددياً وبيانياً

إذا أردنا إيجاد قيمة الدالة د : د(س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س} - ١}$ عند س = ١

بالتعويض عن قيمة س = ١ فإن د(١) = $\frac{(١)^{٢} - ١}{١ - ١}$ = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ كمية غير معينة

ولذلك نلجأ إلى دراسة نهاية د(س) عندما س تقترب إلى العدد (١)

[١] الطريقة العددية

	س تقترب جداً من (١) من اليمين ⟸						⟹ س تقترب جداً من (١) من اليسار				
س	١,٤	١,٣	١,٢	١,١	١,٠١	١	٠,٩٩	٠,٩	٠,٨	٠,٧	٠,٦
د(س)	٢,٤	٢,٣	٢,٢	٢,١	٢,٠١	غير معينة	١,٩٩	١,٩	١,٨	١,٧	١,٦
	د(س) تقترب جداً من (٢) من اليمين ⟸ ⟹ د(س) تقترب جداً من (٢) من اليسار										

وهذة الطريقة تسمى $\lim_{\text{س} \to ١}$ د(س) = ٢

وتقرأ : نهاية د(س) عندما تقترب س من ١ تساوى ٢

تعريف :

إذا كانت قيمة الدالة د تقترب من قيمة وحيدة (ل) عندما تقترب س من ٩ من جهتى اليمين واليسار فإن نهاية د(س) تساوى (ل) وتكتب رمزياً $\lim_{\text{س} \to ٩}$ د(س) = ل

[٢] تقدير النهاية بيانياً

د(س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س} - ١}$ غير معينة عند س ⟵ ١

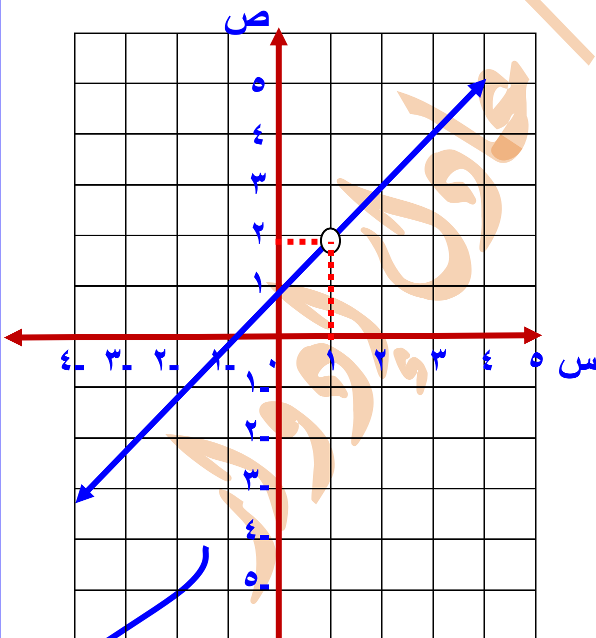
د(س) = $\frac{(\text{س} - ١)(\text{س} + ١)}{(\text{س} - ١)}$ = (س + ١)

ومن الرسم نجد أن د (س) = ١+١=٢

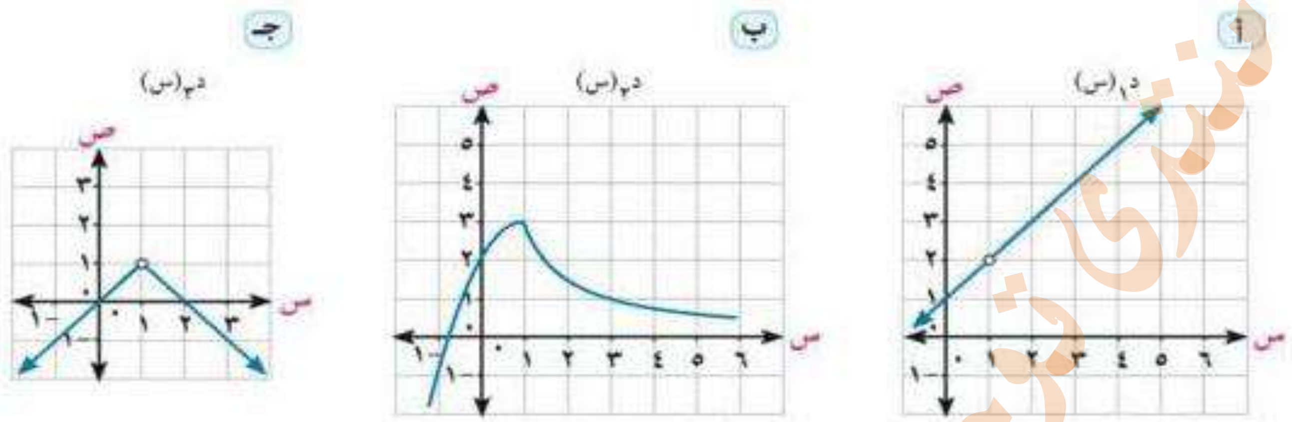
عندما : س ⟵ ١ من اليمين واليسار

فإن د(س) ⟵ ٢ من فوق وتحت

فيكون : $\lim_{\text{س} \to ١}$ د(س) = ٢



مثـــ١ـــال : قدر نهاية الدالة د(س) عندما س ⟵ ١

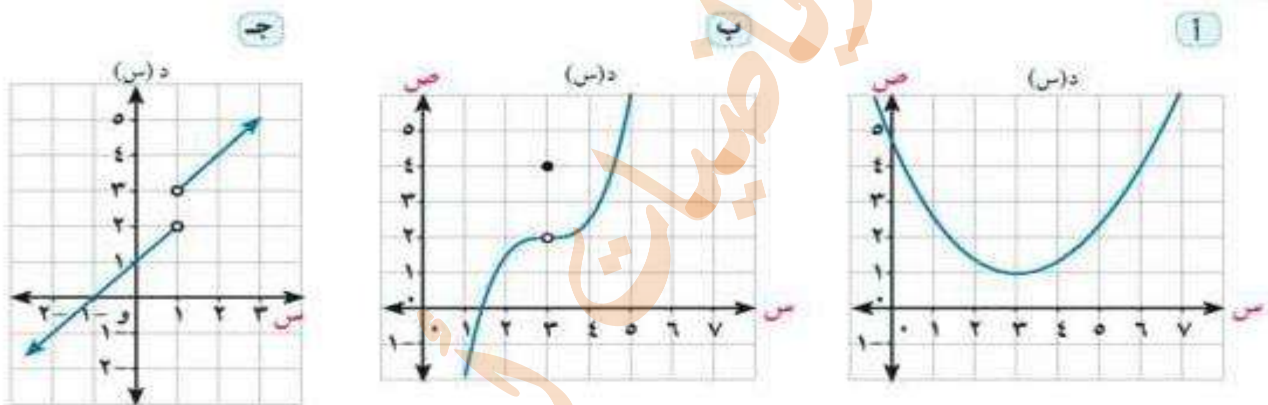


(أ) نهـــــا د(س) = ٢
س ⟵ ١

(ب) نهـــــا د(س) = ٣
س ⟵ ١

(جـ) نهـــــا د(س) = ١
س ⟵ ١

مثـــ٢ـــال : قدر نهاية الدالة د(س) عند النقط المبينة



(أ) نهـــــا د(س) = ١
س ⟵ ٣

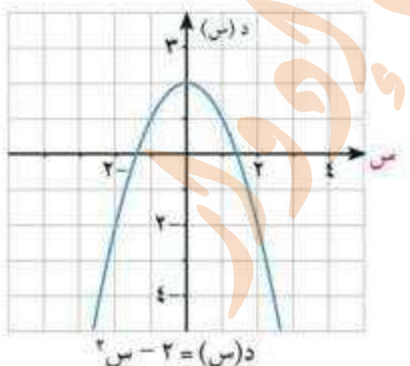
(ب) نهـــــا د(س) = ٢
س ⟵ ٣

(جـ) نهـــــا د(س) =
س ⟵ ١

غير موجودة

ليس من الضرورى أن قيمة الدالة
تساوى قيمة النهاية

مثـــ٣ـــال : من الشكل البيانى المقابل

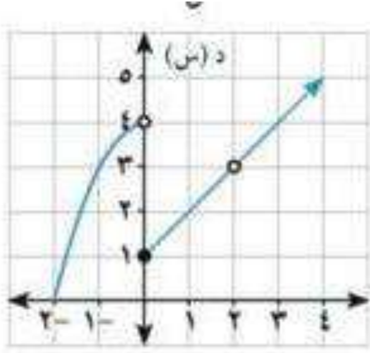


(أ) نهـــــا (٢ ـ $س^٢$) = ٢
س ⟵ ٠

(ب) د(صفر) = ٢

منتدى توجيه الرياضيات إعداد أ/ عادل إدوارد

مثــ٤ــال : من الشكل البيانى المقابل



(أ) د(٠) = ١ (ب) د(٢) غير معرفة

(جـ) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــــــا}}$ د (س) = غير موجودة

(د) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــــــا}}$ د (س) = ٣

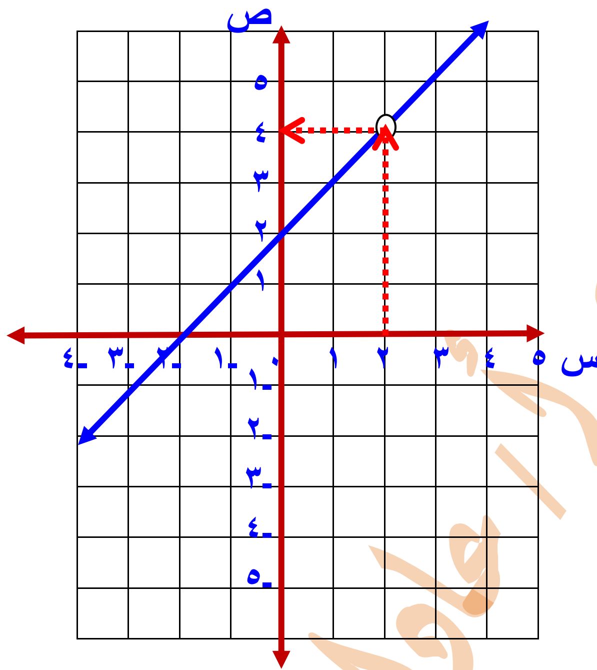
مثــ٥ــال: أكمل الجدول الآتى وأستنتج $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــــــا}} \frac{(س^٢ - ٤)}{(س - ٢)}$

س	١,٩	١,٩٩	١,٩٩٩	٢	٢,٠٠١	٢,٠١	٢,١
د(س)	٣,٩	٣,٩٩	٣,٩٩٩	٤	٤,٠٠١	٤,٠١	٤,١

د(س) = $\frac{(س^٢ - ٤)}{(س - ٢)}$ غير معينة عند س ← ١

د(س) = $\frac{(س - ٢)(س + ٢)}{(س - ٢)}$ = (س + ٢)

ومن الرسم نجد أن د (س) = ٢+٢ = ٤



عندما : س ← ٢ من اليمين واليسار

فإن د(س) ← ٤ من فوق وتحت

فيكون : $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــــــا}}$ د(س) = ٤

مستر/ عادل إدوار

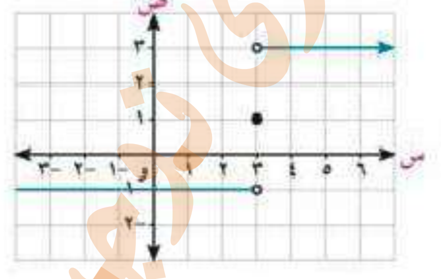
تمـــارين

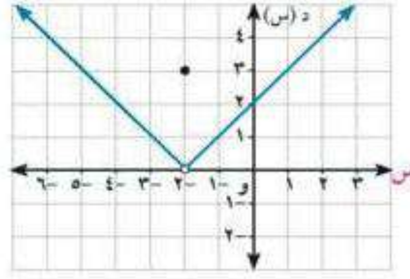
(١) قدّر نهاية الدالة د(س) عند النقط المبينة

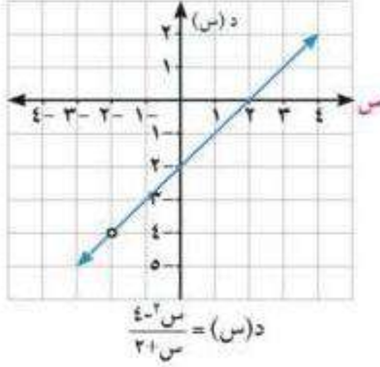
(أ) نهـــــا د(س) ، س ← ٣

(ب) نهـــــا د(س) ، س ← ـ٢

(جـ) نهـــــا د(س) ، س ← ٢



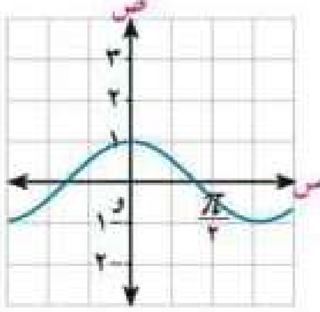




(٢) من الرسم البيانى أوجد

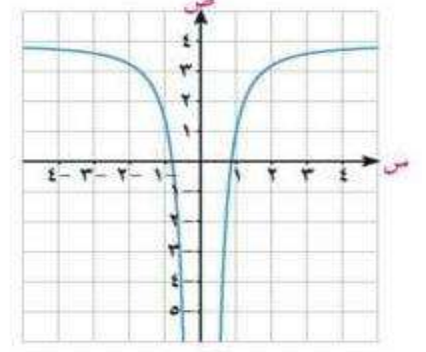
(أ) نهـــــا د(س) ، س ← ٠

(ب) د(٠)

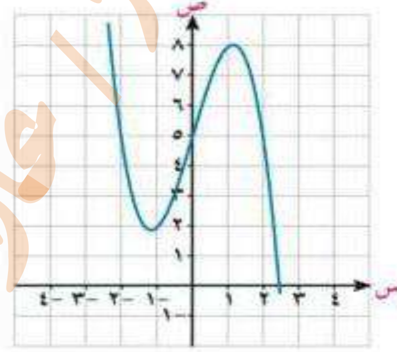


(٣) قدّر نهاية الدالة د(س) عند س ← صفر

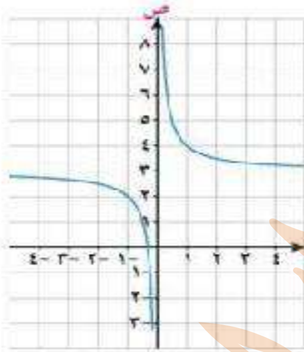
(أ)



(ب)



(جـ)



(٤) أكمل الجدول الآتى وأستنتج نهـــــا (س٢ ـ ١)/(س ـ ١) ، س ← ـ١

س	ـ١,١	ـ١,٠١	ـ١,٠٠١	ـ١	ـ٠,٩٩٩	ـ ٠,٩٩	ـ٠,٩
د(س)				؟؟؟؟			

(٥) باستخدام الحاسبة قدّر نهاية الدوال الآتية

(أ) نهـــــــا (٣س - ١) عندما س ← ٢

(ب) نهـــــــا (س^٢ + ٢) عندما س ← ١

(جـ) نهـــــــا $\frac{(س - ١)}{(س^٢ - ١)}$ عندما س ← ١

(د) نهـــــــا $\frac{(س^٢ - ٤س + ٣)}{(س - ٣)}$ عندما س ← ٣

نهاية دالة عند نقطة

مثال : إذا كانت د (س) = ٣ س + ٤ إوجد د (س) عندما س ← ٠

الحـــــــــل

∵ س ← ١ ∴ نضع س = ١ + هـ حيث عندما س ← ١ فإن هـ ← ٠

∴ د (س) = ٣ (١ + هـ) + ٤ = ٣ + ٣ هـ + ٤ = ٧ + ٣ هـ

∴ د (س) ← ٧ عندما س ← ١

أى أن نهاية الدالة د(س) تساوى ٧ عندما س تؤول إلى ١

ويعبر عن ذلك بالصورة : نهـــــــا (٣ س + ٤) = ٧ (س ← ١)

ملاحظة : فى المثال السابق نحصل على نفس النتيجة بالتعويض المباشر

نظرية : نهاية دالة كثيرة الحدود

نظـــرية (١)

* إذا كانت د (س) كثيرة حدود فى المتغير س فإن : نهـــــــا د (س) = د (م) (س ← م)

فمثلا : نهـــــــا (٣ س + ٤) = د (٣) = ٣ × ٣ + ٤ = ١٣

نتيجة : نهاية الدالة الثابتة : إذا كانت د (س) = ل حيث ل ثابت

فإن : نهـــــــا د (س) = ل (س ← م)

فمثلا : د (س) = ٤ ، نهـــــــا د(س) = ٤ (س ← ٢)

نظرية (٢) : إذا كانت د ، ر دالتين فى المتغير س

وكانت : $\lim_{س \leftarrow ٢} د (س) = ل$ ، $\lim_{س \leftarrow ٢} ر (س) = م$ فإن :

(١) $\lim_{س \leftarrow ٢} [د (س) \pm ر (س)] = \lim_{س \leftarrow ٢} د (س) \pm \lim_{س \leftarrow ٢} ر (س)$

$= ل \pm م$

أى أن : نهاية المجموع الجبرى لدالتين (أو أكثر) = المجموع الجبرى لنهايتيهما

(٢) $\lim_{س \leftarrow ٢} [د (س) \times ر (س)] = \lim_{س \leftarrow ٢} د (س) \times \lim_{س \leftarrow ٢} ر (س)$

$= ل \times م$

أى أن : نهاية حاصل ضرب دالتين (أو أكثر) = حاصل ضرب نهايتيهما (النهايات)

(٣) $\lim_{س \leftarrow ٢} ك \times د (س) = ك \lim_{س \leftarrow ٢} د (س) = ك \times ل$ حيث ك ثابت

أى أن : نهاية حاصل ضرب ثابت × دالة = الثابت × نهاية هذه الدالة

(٤) $\lim_{س \leftarrow ٢} \frac{د (س)}{ر (س)} = \frac{\lim_{س \leftarrow ٢} د (س)}{\lim_{س \leftarrow ٢} ر (س)} = \frac{ل}{م}$ حيث : م ≠ صفر

أى أن :

نهاية خارج قسمة دالتين = خارج قسمة نهايتيهما حيث : نهاية المقسوم عليه ≠ صفر

لإيجاد: $\lim_{س \leftarrow ٢} د (س)$ نوجد د (٢) بالتعويض المباشر فإذا كان الناتج :

١ ـ عدداً حقيقياً فإن نهاية الدالة عند س = ٢ هى هذا العدد الحقيقى

٢ ـ $\frac{\text{عدداً حقيقى} \neq \text{الصفر}}{\text{صفر}}$ " كمية غير معرفة " فإن الدالة لا يكون لها نهاية عند ٢

٣ ـ $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ كمية غير معينة تستخدم النظرية التالية

٤ ـ $\frac{٢}{\pm \infty} = \text{صفر}$

نظرية (٣) : إذا كانت د ، ق دالتين فى المتغير س

وكانت د (س) = ق (س) لجميع قيم س فيما عدا عند س = ٢

وكانت : $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}$ ق (س) لها وجود

فإن : $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}$ ق (س) = $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}$ د (س)

تستخدم هذه النظرية لإيجاد نهاية دالة كسرية جبرية وفيها نختصر العامل الصفرى (س – ٢) فى كل من البسط والمقام ويسمى عن طريق عدة طرق :

منها (!) التحليل ، (!!) القسمة المطولة ، (!!!) الضرب فى المرافق ....

مراجعة على التحليل : يراعى أولا إخراج العامل المشترك الأعلى

الفرق بين مربعين : س^{٢} – ٩ = (س – ٣) (س + ٣)

الفرق بين مكعبين : س^{٣} – ٨ = (س – ٢) (س^{٢} – ٢ س + ٤)

مجموع مكعبين : س^{٣} + ٢٧ = (س + ٣) (س^{٢} + ٣ س – ٩)

المقدار الثلاثى : إذا كان معامل س^{٢} = ١

س^{٢} + ٥ س + ٦ = (س + ٣)(س + ٢)

س^{٢} + ٥ س – ٦ = (س – ١)(س + ٦)

س^{٢} – ٦ س – ١٦ = (س – ٨)(س + ٢)

إذا كان معامل س^{٢} ≠ ١

٣ س^{٢} + ١١ س + ٦ = (س + ٣)(٣ س + ٢)

٢ س^{٢} – ٥ س + ٢ = (٢ س – ١)(س – ٢)

٣ س^{٢} + ٧ س – ٦ = (س + ٣)(٣ س – ٢)

٣ س^{٢} – ١٧ س – ٦ = (س – ٦)(٣ س + ١)

المقدار الثلاثى المربع الكامل :

س^{٢} + ٦ س + ٩ = (س + ٣)^{٢}

٢٥ س^{٢} – ٤٠ س + ١٦ = (٥ س – ٤)^{٢}

أمثلة : أوجد كلاً مما يلى :

مثـال١ : $\lim_{س \to ١} \frac{٣ س + ٤}{س + ٥}$

الحـــل

بالتعويض نجد أن : $\lim_{س \to ١} \frac{٣ س + ٤}{س + ٥} = \frac{٣ \times ١ + ٤}{١ + ٥} = \frac{٧}{٦}$

مثـال٢ : $\lim_{س \to -١} \frac{٣ س + ٤}{س + ١}$

الحـــل

بالتعويض نجد أن :

$\lim_{س \to -١} \frac{٣ س + ٤}{س + ١} = \frac{٣ \times (-١) + ٤}{-١ + ١} = \frac{١}{٠}$ كمية غير معرفة

∴ الدالة ليس لها نهاية أو النهاية ليس لها وجود

إستخدام التحليل لإيجاد نهاية دالة عند نقطة :

مثـال٣ : $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣}$

الحـــل

بالتعويض عن : س = ٣ نجد أن : د (٣) = $\frac{(٣)^٢ - ٩}{٣ - ٣} = \frac{صفر}{صفر}$ غير معينة

∴ $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣} = \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{(س - ٣)}$

$= (س + ٣) = ٦$

مثـال٤ : $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٥س + ٦}{س - ٢}$

الحـــل

بالتعويض عن س = ٢ نجد أن : د (٢) = $\frac{(٢)^٢ - ٥ \times ٢ + ٦}{٢ - ٢} = \frac{صفر}{صفر}$ غير معينة

∴ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٥س + ٦}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(س - ٣)}{(س - ٢)}$

$= (س - ٣) = -١$

مثــ٥ــال : نهـــا $\frac{س^٢ + ٣ س}{س^٢ + س - ٦}$ (س ← -٣)

الحـــــل

بالتعويض عن س = -٣ نجد أن : د (-٣) = $\frac{٩ - ٣ \times ٣}{٩ - ٣ - ٦}$ = $\frac{صفر}{صفر}$ غير معينة

∴ نهـــا (س ← -٣) $\frac{س^٢ + ٣ س}{س^٢ + س - ٦}$ = نهـــا (س ← -٣) $\frac{س (س + ٣)}{(س - ٢) (س + ٣)}$

= نهـــا (س ← -٣) $\frac{س}{(س - ٢)}$ = $\frac{-٣}{-٣ - ٢}$ = $\frac{٣}{٥}$

إستخدام القسمة المطولة لإيجاد نهاية دالة عند تقطة :

مثــ٦ــال : نهـــا $\frac{س^٣ - ٤ س^٢ + س + ٦}{س^٢ - ٤س + ٣}$ (س ← ٣)

الحـــــل

بالتعويض عن س = ٣ نجد أن : د (٣) = $\frac{٣^٣ - ٤ \times ٣^٢ + ٣ + ٦}{٣^٢ - ٤ \times ٣ + ٣}$ = $\frac{صفر}{صفر}$

∴ (س - ٣) عامل مشترك بين البسط والمقام (العامل الصفرى)

بإجراء قسمة مطولة للبسط على (س - ٣) " لصعوبة تحليل البسط "

∵ $س^٣ - ٤ س^٢ + س + ٦$ ÷ (س - ٣) = $س^٢ - س - ٢$

$\pm س^٣ \mp ٣ س^٢$

$- س^٢ + س + ٦$

$\mp س^٢ \pm ٣ س$

$- ٢ س + ٦$

$\mp ٢ س \pm ٦$

....

∴ نهـــا (س ← ٣) $\frac{(س - ٣) (س^٢ - س - ٢)}{(س - ٣) (س - ١)}$ = $\frac{٩ - ٣ - ٢}{٣ - ١}$ = ٢

مثــ٧ــال : نهـــا $\frac{س^٣ - ٢س + ١}{س^٢ + ٣س - ٤}$ (س ← ١)

الحــــــــــل

بالتعويض عن س = ١ نجد أن : د (١) = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

∴ (س – ١) عامل مشترك بين البسط والمقام (العامل الصفرى)

يمكن استخدام طريقة مبسطة لإجراء القسمة بطريقة (القسمة التركيبية)

(١) نكتب معاملات المقسوم مرتبة تنازلياً وتساوى المقسوم علية بالصفر للحصول على قيمة س كما بالشكل

(٢) أترك أول معامل ثم أضرب المعامل الأول فى قيمة س وأكتب الناتج أسفل المعامل الثانى وأجمع

(٣) كرر عمليتى الضرب والجمع

نجد أن معاملات خارج القسمة هى: ١ ، ـ١ ، ـ١

على الترتيب فإن خارج القسمة هو س^٢ ـ س ـ ١

١	ـ ٢	٠	+١	١
	١	□	□	
١	ـ ١			
١	+ـ٢	٠	+١	
١	ـ ١	ـ ١	ـ١	
١	ـ ١	ـ ١	٠	

خارج القسمة

س^٢ ـ س ـ ١

∴ $\lim\limits_{س \to ١} \frac{(س - ١)(س^٢ - س - ١)}{(س - ١)(س + ٤)} = \frac{١ - ١ - ١}{١ + ٤} = \frac{١}{٥}$

مثــ٨ــال : $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^٣ - ٧ س + ٦}{٣س^٢ - ٨ س + ٤}$

الحــــــــــل

بالتعويض عن س = ١ نجد أن : د (١) = $\frac{(١)^٣ - ٧ \times ١ + ٦}{٣(١)^٢ - ٨ \times ١ + ٤} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ غير معينة

∴ (س – ١) عامل مشترك بين البسط والمقام (العامل الصفرى)

يمكن استخدام طريقة مبسطة لإجراء القسمة بطريقة (القسمة التركيبية)

١	+ ٠	ـ ٧	ـ ٦	٢
	٢	□	□	
١	+ ٢	ـ ٧	ـ٦	
١	+ ٢	٤	ـ ٦	
١	+ ٢	ـ٣	٠	

خارج القسمة

س^٢ + ٢ س ـ٣

∴ $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(س^٢ + ٢س - ٣)}{(س - ٢)(٣س - ٢)}$

$= \lim\limits_{س \to ٢} \frac{(س^٢ + ٢س - ٣)}{(٣س - ٢)}$

$= \frac{(٤ + ٤ - ٣)}{(٦ - ٢)} = \frac{٥}{٤}$

الضرب فى المرافق :

إذا وجد فرق بين جذرين تربيعيين لمقدارين جبريين (فى البسط أو المقام أو كليهما)
نضرب كلاً من البسط والمقام فى مرافق (فى البسط أو المقام أو كليهما)

مثـــ٩ــال : $\lim_{س \to ٠} \frac{س^٢ + ٢س}{\sqrt{س+٩} - ٣}$

الحـــــــل

بالتعويض عن س = ٠ نجد أن : د (٠) = $\frac{(٠)^٢ + ٢ \times ٠}{\sqrt{٠+٩} - ٣}$ = $\frac{صفر}{صفر}$ غير معينة

بالضرب بسطاً ومقاماً × مرافق المقام : $\sqrt{س+٩} + ٣$ نجد أن :

$$\lim_{س \to ٠} \frac{س (س + ٢)(\sqrt{س+٩} + ٣)}{(س + ٩) - ٩}$$

$$= (٠ + ٢) (\sqrt{٠ + ٩} + ٣) = ١٢$$

مثـــ١٠ــال : $\lim_{س \to ٣} \frac{س - ٣}{\sqrt{س+١} - ٢}$

الحـــــــل

بالتعويض عن س = ٣ نجد أن : د (٣) = $\frac{٣ - ٣}{\sqrt{٣+١} - ٢}$ = $\frac{صفر}{صفر}$ كمية غير معينة

بالضرب بسطاً ومقاماً × مرافق المقام : $\sqrt{س+١} + ٢$ نجد أن :

$$\lim_{س \to ٠} \frac{(س - ٣)(\sqrt{س+١} + ٢)}{(س + ١) - ٤} = (\sqrt{٣ + ١} + ٢) = ٤$$

مثـــ١١ــال : $\lim_{س \to ٢} \left(\frac{س^٢ - س}{س - ٢} - \frac{٢}{س - ٢} \right)$

الحـــــــل

بتوحيد المقامات نجد أن :

$$\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - س - ٢}{س - ٢}$$

بالتعويض عن س = ٢ نجد أن : د (٢) = $\frac{٢^٢ - ٢ - ٢}{٢ - ٢}$ = $\frac{صفر}{صفر}$

∴ $\lim_{س \leftarrow ٢} \frac{(س - ٢)(س + ١)}{س - ٢}$ = ٢ + ١ = ٣

تمـــــــــارين

أكمـــــــل ما يأتى

(١) $\lim_{س \leftarrow ٢}$ (٣س - ١) = ... (٢) $\lim_{س \leftarrow -٢} \frac{س^٣ - ٢٧}{س - ٣}$ = ...

(٣) $\lim_{س \leftarrow -٢} \frac{س^٢ - ٤}{س + ٢}$ = ...

(٤) $\lim_{س \leftarrow \frac{\pi}{٢}}$ (٢س - جا س) = ...

(٥) إذا كان : $\lim_{س \leftarrow ٢} \frac{أ}{س + ١}$ = ٤ فإن : أ = ...

إختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه

(١) $\lim_{س \leftarrow ٤}$ (٣س - $\sqrt{س}$) (أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ١٤ (د) ١٦

(٢) $\lim_{س \leftarrow -٢} \frac{٣س^٢ - ١٢}{س + ٢}$ (أ) ١٨ (ب) -٣ (جـ) ١٢ (د) -١٢

(٣) $\lim_{س \leftarrow ٣} \frac{س^٢ - س - ٦}{س^٢ + س - ١٢}$ (أ) $\frac{٥}{٧}$ (ب) $\frac{١}{٧}$ (جـ) -١ (د) -٥

(٤) $\lim_{س \leftarrow ٠} \frac{\sqrt{س + ١} - ١}{س}$ (أ) ٠ (ب) $\sqrt{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) غير معرفة

(٥) ∴ $\lim_{س \leftarrow \frac{\pi}{٢}} \frac{جا س}{س}$ (أ) ١ (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (جـ) $\frac{٢}{\pi}$ (د) غير معرفة

أجد كلاً مما يأتى :

١	$\text{نهـا}_{س \to ٣} \dfrac{س^{٢} + س + ٦}{س + ٣}$	٢	$\text{نهـا}_{س \to ٣} \dfrac{س^{٢} + ٩}{س + ٣}$
٣	$\text{نهـا}_{س \to ٢} \dfrac{س^{٢} + س - ٦}{س - ٢}$	٤	$\text{نهـا}_{س \to ٣} \dfrac{س^{٢} - ٩}{س - ٣}$
٥	$\text{نهـا}_{س \to -٣} \dfrac{س^{٢} + ٥س + ٦}{س + ٣}$	٦	$\text{نهـا}_{س \to ٣} \dfrac{س^{٢} - ٥س + ٦}{س - ٣}$
٧	$\text{نهـا}_{س \to ٢} \dfrac{س^{٣} - ٨}{س^{٢} - ٤}$	٨	$\text{نهـا}_{س \to -٣} \dfrac{س^{٣} - ٢٧}{س^{٢} - ٩}$
٩	$\text{نهـا}_{س \to ١} \dfrac{س^{٢} - ١}{٢س - ٢}$	١٠	$\text{نهـا}_{س \to ٢} \dfrac{٣س^{٢} - ١٢}{س^{٣} - ٨}$
١١	$\text{نهـا}_{س \to ٥} \dfrac{٢س - ١٠}{س^{٢} - ٥س}$	١٢	$\text{نهـا}_{س \to ١} \dfrac{س^{٢} + ٣س - ٤}{س^{٢} - س}$
١٣	$\text{نهـا}_{س \to ٢} \dfrac{س^{٢} - ٥س + ٦}{س^{٢} + ٢س - ٨}$	١٤	$\text{نهـا}_{س \to -٣} \dfrac{س^{٣} - ٢٧}{س^{٢} + ٩س + ١٨}$
١٥	$\text{نهـا}_{س \to -١} \dfrac{س^{٢} - ٥س - ٦}{س^{٢} - ١}$	١٦	$\text{نهـا}_{س \to ٤} \dfrac{س^{٢} - ٧س + ١٢}{س - ٤}$
١٧	$\text{نهـا}_{س \to ٣} \dfrac{٢س^{٢} - ٧س + ٣}{س - ٣}$	١٨	$\text{نهـا}_{س \to -١} \dfrac{٣س^{٢} - س - ٤}{س^{٢} + ٣س + ٢}$

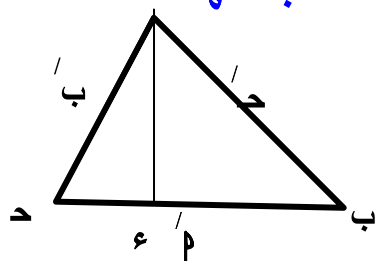
١٩	$\lim_{س \to ٢} \frac{٢س^٢ + ٣س - ١٤}{٣س^٢ - ٤س - ٤}$	٢٠	$\lim_{س \to -١} \frac{٢س^٢ + ٧س + ٥}{٣س^٢ + ٤س + ١}$
٢١	$\lim_{س \to ٤} \frac{٢س^٢ - ٧س - ٤}{س^٢ - ٧س + ١٢}$	٢٢	$\lim_{س \to ٣} \frac{٢س^٢ - ٥س - ٣}{س - ٣}$
٢٣	$\lim_{س \to ٣} \left(\frac{س^٢ + س - ١٢}{س^٢ - ٩}\right)^٢$	٢٤	$\lim_{س \to \frac{٢}{٣}} \left(\frac{٩س^٢ - ٤}{٣س - ٢}\right)^٢$
٢٥	$\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ - س - ٦}{س^٢ - ٤}$	٢٦	$\lim_{س \to ١} \frac{س^٣ - ٢س^٢ + ١}{س^٣ - ١}$
٢٧	$\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ - س^٢ - ٨س + ١٢}{س^٢ - ٣س + ٢}$	٢٨	$\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ - س^٢ - ٤س - ٤}{س^٢ + س - ٦}$

٢٩	$\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ + س - ١٠}{س^٢ - ٤س + ٤}$	٣٠	$\lim_{س \to ١} \frac{س^٣ + ٤س^٢ - س - ٤}{س^٤ - ١}$
٣١	$\lim_{س \to ٥} \frac{س - ٥}{\sqrt{س - ٤} - ١}$	٣٢	$\lim_{س \to -١} \frac{\sqrt{س + ١٧} - ٤}{س + ١}$
٣٣	$\lim_{س \to ٠} \frac{س^٢ + ٢س}{\sqrt{س + ٢٥} - ٥}$	٣٤	$\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{١ + س} - \sqrt{١ - س}}{٢س}$
٣٥	$\lim_{س \to -١} \frac{\sqrt{س^٢ - س + ٢} - ٢}{\sqrt[٣]{س^٣ + ١}}$	٣٦	$\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س + ١} - ٢}{\sqrt{٧ - س} - ٢}$

قانون الجيب (قاعدة الجيب)

فى أى مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها

أى أنه : في أي مثلث أ ب جـ يكون :



$$\frac{أ/}{جا أ} = \frac{ب/}{جا ب} = \frac{جـ/}{جا حـ}$$

حيث الرموز : أ ، ب ، حـ تعبر عن قياسات زوايا المثلث أ ب حـ

، أ/ ، ب/ ، حـ/ تعبر عن أطوال الأضلاع ب حـ ، أ حـ ، أ ب على الترتيب

البرهان :

مساحة △ أ ب حـ = $\frac{1}{2}$× ب حـ × أ ء ،

∵ أ ء = حـ/ جا ب (من مساحة △أ ب ء)

∴ مساحة △أ ب حـ =$\frac{1}{2}$× ب/ جـ/ جا أ =$\frac{1}{2}$× أ/ جـ/ حا ب =$\frac{1}{2}$× أ/ ب/ حا جـ

بالضرب × ٢ ثم القسمة على أ/ ب/ جـ/ ينتج المطلوب

$$\frac{أ/}{جا أ} = \frac{ب/}{حا ب} = \frac{جـ/}{حا حـ}$$

ملاحظات :

محيط المثلث = مجموع أطوال أضلاعه = أ/ + ب/ + جـ/

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$× طول القاعدة × الارتفاع

مساحة المثلث =$\frac{1}{2}$× حاصل ضرب طولي أي ضلعين × جيب الزاوية المحصورة بينهما

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$× أ/ ب/ جا جـ = $\frac{1}{2}$× ب/ جـ/ جا أ = $\frac{1}{2}$× أ/ جـ/ جاب

محيط الدائرة = ٢ ط نق & مساحة الدائرة = ط نق٢

أكبر ضلع في المثلث يقابل أكبر زاوية في المثلث

أصغر ضلع في المثلث يقابل أصغر زاوية في المثلث

مثـال ١ : في المثلث ٩ ب جـ إذا كان ٩/ = ١٠سم ، ق(∠ب) = ٤٥° ، ق(∠جـ) = ٦٠°
فأوجد قيمة كل من ب/ ، جـ/ ومساحة المثلث ٩ ب جـ لأقرب رقم عشري

الحـــــــــل

∵ ق(∠٩) = ١٨٠° − (٤٥ + ٦٠) = ٧٥°

∴ $\frac{٩/}{جا ٩} = \frac{ب/}{جا ب} = \frac{جـ/}{جا جـ}$ ∴ $\frac{١٠}{جا ٧٥} = \frac{ب/}{جا ٤٥} = \frac{جـ/}{جا ٦٠}$

∴ ب/ = $\frac{١٠ \times جا ٤٥}{جا ٧٥}$ = ٧,٤ سم

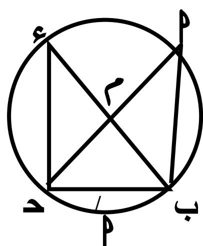
، جـ/ = $\frac{١٠ \times جا ٦٠}{جا ٧٥}$ = ٩ سم

، مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ا/ ب/ جا جـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × ٧,٤ × جا ٦٠° = ٣٢ سم^{٢}

تمرين مشهور

في أي مثلث ٩ ب جـ يكون :

∴ $\frac{٩/}{جا ٩} = \frac{ب/}{جا ب} = \frac{جـ/}{جا جـ}$ = ٢ نق



حيث نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث ٩ ب جـ

البرهان :

نرسم الدائرة م المارة برؤوس Δ ٩ ب حـ
ثم نرسم القطر ب ء ، الوتر حـ ء
فيكون : ق(∠ب حـ ء) = ٩٠° " محيطية مرسومة فى نصف دائرة "
، ق(∠٩) = ق(∠ء) " محيطيتان تحصران نفس القوس "

فى Δ ء ب حـ : حا ء = $\frac{٩/}{ب ء}$ = $\frac{٩/}{٢ نق}$ ∴ حا ٩ = $\frac{٩/}{٢ نق}$

∴ $\frac{٩/}{حا ٩}$ = ٢ نق ∴ $\frac{٩/}{حا ٩} = \frac{ب/}{حا ب} = \frac{حـ/}{حا حـ}$ = ٢ نق

نتائج هامة

٩/ = ٢ نق جا ٩ & ب/ = ٢ نق جاب & جـ/ = ٢ نق جا جـ

جا ا = $\frac{٩/}{٢ نق}$ & جا ب = $\frac{ب/}{٢ نق}$ & جا جـ = $\frac{حـ/}{٢ نق}$

ملاحظة هامة : تستخدم كل من قاعدة الجيب والتمرين المشهور إذا علم :

- قياسا زاويتين وطول ضلع
- قياسا زاويتين وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث
- قياسا زاويتين وطول محيط المثلث

مثـــ٢ ــال: في المثلث ا ب جـ إذا كان ا/ = ١٠سم ، ق(∠ب) = ٤٥° ، ق(∠جـ) = ٦٠°
فأوجد محيط الدائرة الخارجة للمثلث ا ب جـ

الحــــــــــــــل

∵ ق(∠ا) = ١٨٠ − (٤٥° + ٦٠°) = ٧٥°

∴ ا/ ÷ جا ا = ب/ ÷ جا ب = جـ/ ÷ جا جـ = ٢ نق

∴ ١٠ ÷ جا ٧٥ = ب/ ÷ جا ٤٥ = جـ/ ÷ جا ٦٠ = ٢ نق

∴ ٢ نق = ١٠ ÷ جا ٧٥ = ١٠,٣ سم ∴ نق = ٥,٢ سم

∴ محيط الدائرة = ٢ ط نق = ٢ × ط × ٥,٢ = ٣٢,٥ سم

مثـ٣ـــال: إذا كان مقاييس زوايا مثلث تتناسب مع ١ : ٢ : ٣ فأثبت أن أطوال الأضلاع المقابلة لهذه الزوايا تتناسب مع ١ : $\sqrt{3}$: ٢

الحــــــــــــــل

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

∴ ق(∠ا) = ١٨٠ × $\frac{١}{٦}$ = ٣٠°

∴ ق(∠ب) = ١٨٠ × $\frac{٢}{٦}$ = ٦٠°

∴ ق(∠جـ) = ١٨٠ × $\frac{٣}{٦}$ = ٩٠°

∵ ا/ ÷ جا ا = ب/ ÷ جا ب = جـ/ ÷ جا جـ

∴ ا/ : ب/ : جـ/ = جا ا : جا ب : جا جـ = جا ٣٠° : جا ٦٠° : جا ٩٠°

= $\frac{١}{٢}$: $\frac{\sqrt{3}}{٢}$: ١ = ١ : $\sqrt{3}$: ٢

مثـــ٤ ـــال: ل م ن مثلث فيه كان ، ق(∠ل) = ٥٢ َ ٣٨ ْ ، ق(∠ن) = ١٧ َ ٤٤ ْ

م َ = ٣٥٢,٧ فأوجد م ن ،، ل م

الحـــــــل

∵ ق(∠م) = ١٨٠ ْ – (٥٢ َ ٣٨ ْ + ١٧ َ ٤٤ ْ) = ٥١ َ ٩٦ ْ

∴ م َ / جا م = ل َ / جا ل = ن َ / جا ن

∴ ٣٥٢,٧ / جا ٥١ َ ٩٦ ْ = ل َ / جا ٥٢ َ ٣٨ ْ = ن َ / جا ١٧ َ ٤٤ ْ

∴ م ن = ل َ = (٣٥٢,٧ × جا ٥٢ َ ٣٨ ْ) / جا ٥١ َ ٩٦ ْ = ٢٢٢,٩

∴ ل م = ن َ = (٣٥٢,٧ × جا ١٧ َ ٤٤ ْ) / جا ٥١ َ ٩٦ ْ = ٢٤٨

مثـــ٥ ـــال: إذا رمزنا لمساحة سطح المثلث ا ب جـ بالرمز Δ فأثبت أن

Δ = ا َ ب َ جـ َ / ٤ نق = ٢ نق ٢ جا ا جا ب جا جـ حيث : نق طول نصف قطر الدائرة

الحـــــــل

∵ Δ = ١/٢ ب َ جـ َ جا ا ∵ ا َ / جا ا = ٢ نق ∴ جا ا = ا َ / ٢ نق

∴ Δ = ١/٢ ب َ جـ َ ا َ / ٢ نق = ا َ ب َ جـ َ / ٤ نق [١]

∵ ب َ / حا ب = جـ َ / حا جـ = ٢ نق ∴ ب َ = ٢ نق حا ب ، جـ َ = ٢ نق حا جـ

∴ Δ = ١/٢ × ٢ نق حا ب × ٢ نق جا جـ × جا ا = ٢ نق ٢ حا ب جا جـ جا ا

مثـ٦ ـال: ا ب حـ مثلث فيه حا ا : جا ب : جا جـ = ٩ : ٢ : ٤

أوجد أطوال أضلاعه إذا علم أن محيطه = ٤٥ سم

الحـــــــل

∵ ا َ / جا ا = ب َ / حا ب = جـ َ / حا حـ = م

∴ $\frac{أ'}{٩} = \frac{ب'}{٢} = \frac{جـ'}{٤} =$ م ∴ أ' = ٩ م ، ب' = ٢ م ، جـ' = ٤ م

∴ $\frac{أ'}{٩} = \frac{ب'}{٢} = \frac{جـ'}{٤} = \frac{أ' + ب' + جـ'}{٩ + ٢ + ٤} =$ م ، حيث $\frac{\text{مجموع المقدمات}}{\text{مجموع التوالى}}$ = أحدى النسب

∴ $\frac{أ'}{٩} = \frac{ب'}{٢} = \frac{جـ'}{٤} = \frac{٤٥}{١٥} = ٣$

∴ أ' = ٩ × ٣ = ٢٧ سم

ب' = ٢ × ٣ = ٦ سم

جـ' = ٤ × ٣ = ١٢ سم

تمـــــــــارين

١ – ل م ن مثلث فيه ل' = ٢٤ سم ، ق(∠ل) = ٣٧° ، ق(∠م) = ١٠٠° أوجد لأقرب رقم عشري واحد كل من ن' ، وطول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث

٢ – أ ب جـ مثلث فيه أ' = ٢٠ سم ، ق(∠ب) = ٣٠° ، ق(∠جـ) = ٨٠° أوجد مساحة المثلث أ ب جـ

٣ – △ أ ب حـ فيه ق(∠أ) = ٦٠ ؛ ق(∠ب) = ٤٠° طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه = ٢٠ سم أوجد مساحة سطح المثلث لأقرب سم٢

٤ – △أ ب حـ فيه أ' = ٦سم ؛ ق(∠ب) = ٤٠° ؛ ق(∠حـ) = ٧٥° أوجد طول كلا من ب' ، أ ب قطر الدائرة المارة بروؤس △ أ ب حـ لأقرب رقم عشري

٥ – أ ب حـ فيه أ' = ١٠سم ؛ ق(∠ب)=٥٥° ؛ ق(∠حـ) = ٤٠° أوجد طول كلا من حـ' مساحة (△ أ ب حـ) ؛ محيط الدائرة المارة بروؤس △ أ ب حـ لأقرب رقم عشري

٦ – △ أ ب حـ فيه أ' = ٦سم ؛ ق(∠ب) = ١٢° ٤٦' ؛ ق(∠حـ) = ١٨° ٧٤' أوجد طول ب لأقرب رقمين عشريين مساحة الدائرة المارة بروؤس △ أ ب حـ لأقرب سم٢

٧ – △ س ص ع فيه ص' = ١٠سم ؛ ق(∠ص) = ١٠٠° ق(∠ع) = ٣٢° أوجد كلا من مساحة (△ س ص ع) لأقرب سم٢ ؛ محيط △ س ص ع لأقرب سم

٨ – △ أ ب حـ فيه حـ' = ١٩سم ؛ ق(∠أ) = ١١٢° ؛ ق(∠ب) = ٣٣° أوجد طول كلا من ب

لأقرب سم ؛ نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث لأقرب رقمين عشريين

٩ - Δ ٩ ب حـ فيه ق(∠ ٩) = ٦٠° ؛ ق (∠ب) = ٤٠° طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه = ٢٠ سم أوجد مساحة سطح المثلث لأقرب سم٢

١٠ - Δ٩ ب حـ فيه ٩/ = ١٢ سم ؛ ٩ حـ = ١٠سم ؛ طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه = ٧سم أوجد طول حـ/ لأقرب سم حيث Δ ٩ ب حـ حاد الزوايا

١١ - Δ ٩ ب حـ فيه حا حـ = ٢, ٠ ؛ حـ/ = ١٤سم أوجد مساحة الدائرة المارة برؤوسه

١٢ - Δ ٩ ب حـ فيه ٩/ = ٥سم ؛ ق (∠ب) = ١٢٠° ؛ مساحة (Δ٩ ب حـ) = $١٠\sqrt{٣}$ سم٢ أوجد حـ/

١٣ - دائرة محيطها ٤٤سم تمر برؤوس Δ ٩ ب حـ الذي فيه ق (∠ ٩) = ٦٠° أوجد ٩/

١٤ - دائرة مساحة سطحها ١٥٤سم٢ تمر برؤوس Δ ٩ ب حـ الذي فيه ٩ ب = ب حـ ؛ ق (> ب) = ٧٠° أوجد ٩/

١٥ - دائرة طول نصف قطرها ١٠سم تمر برؤوس Δ ٩ ب حـ الذي فيه ق (∠ ٩) = ٢٧° ؛ ق (∠ حـ) = ٥٢° أوجد محيط Δ٩ ب حـ

١٦ - Δ ٩ ب حـ فيه ق (∠ ٩) : ق (∠ ب) : ق (∠ حـ) = ١ :٣ :٥ فإذا كان ٩/ = ١٨,٣ سم أوجد محيط Δ ٩ ب حـ لأقرب سم

١٧ - Δ س ص ع فيه ق (∠ س) : ق (∠ ص) : ق (∠ ع) = ١ : ٢ : ٣ إثبت أن : س/٢ : ص/٢ : ع/٢ = ١ : ٣ : ٤

١٨ - Δ ٩ ب حـ فيه ٩/ = ٨ سم إثبت أن : ـ مساحة (Δ ٩ ب حـ) = $\frac{٢ب/حـ/}{نق}$ حيث نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة عن Δ٩ ب حـ

١٩ - Δ س ص ع قائم الزاوية في ص ، ق (∠ ع) = ٣٠° إثبت أن مساحته = $\sqrt{٣}$ نق

٢٠ - في Δ ٩ ب حـ إثبت أن : ـ مساحة (Δ ٩ ب حـ) = ٢ نق٢ حا ٩ حا ب حا حـ

٢١ – Δ ٢ ب حـ محيطه ١٦سم ؛ ق (∠ ٢) = ٥٠° ؛ ق (∠ ب) =٥٦° أوجد ب/ ، حـ/

٢٢ – Δ ٢ ب حـ محيطه ١٢ سم ؛ ق (∠ ٢) =٤٧° ؛ ق (∠ ب) = ٥٣° أوجد ب/

٢٣ – Δ ٢ ب حـ فيه ب حـ = ٥٥سم ، ق (∠ حـ) =٢٧° ، ق (∠ ٢) = ٢٩° أوجد طول مسقط ٢ ب علي ب حـ ؛ طول العمود المرسوم من ٢ علي ب حـ لأقرب سم

٢٤ – Δ ٢ ب حـ فيه ٢/ = ١٠سم ، ق (∠ ب) =٥٠° ، ق (∠ حـ) =٦٠° أوجد طول كلا من نصفي قطري الدائرتين الخارجة والداخلة للمثلث ٢ ب حـ

٢٥ – ٢ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه ٢ ب = ١٨سم ؛ ق (∠ حـ ٢ ب) = ٣٦° ، ق (∠ ء ب ٢) = ٤٤° أوجد طول قطره ٢ حـ ؛ مساحة سطح متوازي الأضلاع ٢ ب حـ ء لأقرب وحدة

٢٦ – ٢ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه ٢ حـ = ٢٠ سم ؛ ق (∠ ب ٢ م) =٣٨° حيث م نقطة تقاطع قطريه؛ ق (∠ ٢ ب م) =٦٢ أوجد طول كلا من ٢ ب ؛ ب ء

٢٧ – ٢ ب حـ ء شبه منحرف فيه ٢ ء // ب حـ ؛ ٢ ء = ١٥ سم ؛ ق (∠ ء) =١٠٠° ؛ ق (∠ ب) = ٦٥° ؛ ق (∠ ٢ حـ ب) =٣٢° أوجد طول كلا من ٢ جـ ، ب حـ لأقرب سم ، مساحة سطح شبه المنحرف ٢ ب حـ ء لأقرب سم؟

٢٨ – ٢ ب حـ ء شكل رباعي دائري حيث ٢ ب قطر الدائرة المارة برؤوسه وطول نصف قطرها ٧سم ، ق (∠ حـ ٢ ب) =٢٠° ، ق (∠ ٢ ب ء) =٤٠° أوجد مساحة سطح الشكل ٢ ب حـ ء

٢٩ – ٢ ب حـ ء هـ مخمس منتظم طول ضلعه ١٨سم أوجد طول قطره لأقرب سم

٣٠ – ٢ ب جـ متساوي الساقين فيه ق (∠ ٢) = ١٢٠°، وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه ٢٠ سم أوجد ب/ ، ثم استنتج مساحة المثلث لأقرب سم؟

حمل الآن

مجانا وحصريا

المراجعة رقم (3)

اختبار شهر اكتوبر

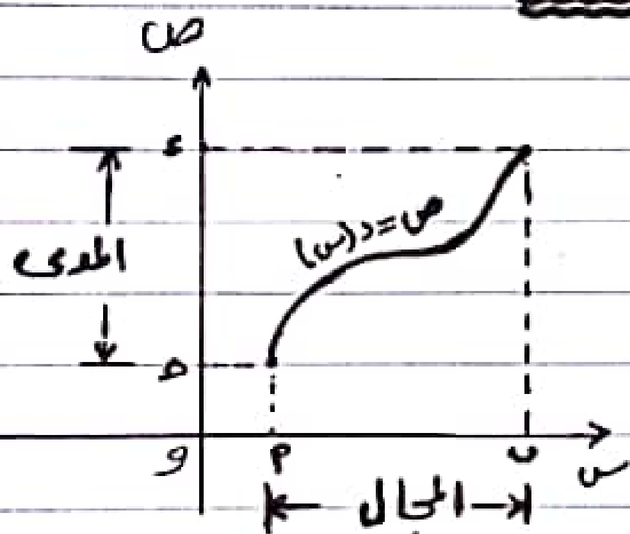




الدالة ذات المتغير الحقيقي

الدالة د: س ⟵ ص تسمى دالة حقيقية إذا كان كل من المجال (س) والمجال المقابل (ص) هو مجموعة الأعداد الحقيقية أو مجموعة جزئية منها.

* تحديد مجال الدوال الحقيقية ومداها :-



* مجال الدالة :-

(1) هو مجموعة العناصر التي يمكن التعويض بها في قاعدة الدالة والتي تكون عندها الدالة معرفة.

(2) هو الفترة المقابلة لمنحنى الدالة على محور السينات في هذا الشكل مثلاً نجد أن مجال الدالة د(س) = [أ ، ب]

* مدى الدالة :-

(1) هو مجموعة صور عناصر المجال بواسطة قاعدة الدالة

(2) هو الفترة المقابلة لمنحنى الدالة على محور الصادات مثلاً في هذا الشكل نجد أن مدى الدالة د(س) = [هـ ، ء]

ملاحظة

قبل رسم منحنيات الدوال لا بد من إيجاد مجال هذه الدوال لمعرفة الفترة التي يرسم فيها المنحنى ومعرفة ما إذا كان هناك ثغرات أو قفزات لمنحنى الدالة

Scanned by CamScanner

(١) الدالة كثيرة الحدود :-

مجال الدالة كثيرة الحدود يساوي ح ما لم تكن معرفة على مجموعة جزئية منها

(٢) الدالة الكسرية :-

إذا كانت د دالة كسرية حيث $د(س) = \frac{هـ(س)}{ه(س)}$
حيث هـ ، ه دوال كثيرات حدود فإن
مجال الدالة د = ح - مجموعة أصفار المقام

مثلاً :-

إذا كانت $د(س) = \frac{س - ٣}{س^٢ - ٥س + ٦}$

$\therefore د(س) = \frac{س - ٣}{(س - ٣)(س - ٢)}$

$\therefore$ مجال الدالة = ح - {٣ ، ٢}

$د(س) = \frac{١}{س - ٢}$

إذا كانت $د(س) = \frac{س}{س^٢ + ١}$

هنا أصفار المقام = ϕ

$\therefore$ مجال الدالة = ح

(٣) إذا كانت $د(س) = \sqrt[ن]{هـ(س)}$ حيث
ن ∈ ص$^+$ ، ن > ١ ، هـ(س) كثيرة حدود فإن :-

(١) إذا كانت ن عدد فردي فإن مجال الدالة = ح

(٢) إذا كانت ن عدد زوجي فإن مجال الدالة هو مجموعة قيم س بشرط هـ(س) ≥ صفر

مثال

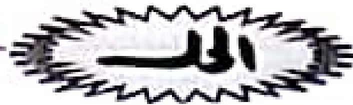
عين مجال الدوال الآتية :-

(١) $د(س) = \sqrt[٣]{س + ٢}$

(٢) $د(س) = \sqrt{س + ٢}$

Scanned by CamScanner

(٣) د(س) = $\sqrt{٤ - س^٢}$ (٤) د(س) = $\sqrt{س^٢ - ٤}$



(١) ∵ د(س) = $\sqrt[٣]{س + ٢}$ دليل الجذر عدد فردي

∴ المجال = ح

(٢) ∵ د(س) = $\sqrt{س + ٢}$ دليل الجذر عدد زوجي

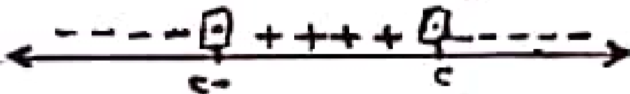
∴ مجال الدالة هو قيم س التي تجعل س + ٢ ≥ ٠

∴ س ≥ -٢ ومنها مجال الدالة = [-٢ ، ∞[

(٣) ∵ د(س) = $\sqrt{٤ - س^٢}$ دليل الجذر عدد زوجي

وتحت الجذر دالة تربيعية ⟵ نبحث إشارة المقدار تحت الجذر

وذلك بوضع ٤ - س^٢ = ٠ ∴ س = ± ٢



∴ مجال الدالة = [-٢ ، ٢]

(٤) د(س) = $\sqrt{س^٢ - ٤}$ دليل الجذر عدد زوجي

∴ نبحث المقدار إشارة المقدار الذي تحت الجذر

بوضع س^٢ - ٤ = ٠ ∴ س = ± ٢



∴ مجال الدالة = ح -]-٢ ، ٢[

* تدريب : أوجد مجال الدوال الآتية

(١) د(س) = $\sqrt{س^٣ + ١}$ (٢) د(س) = $\sqrt{س^٢ - ٥س + ٦}$

Scanned by CamScanner

(٤) اذا كانت $د(س) = \frac{ه(س)}{ω(س)}$ وكانت ه(س) أو ω(س) أو كلاهما دوال جذرية

فان مجال الدالة د = {م$_1$ ∩ م$_2$} − {أصفار دالة المقام}

حيث م$_1$ مجال ه(س) ، م$_2$ مجال ω(س)

مثال

عين مجال الدوال الاتية

(١) $د(س) = \frac{س}{\sqrt{١-س}}$ (٢) $د(س) = \frac{\sqrt{س-٣}}{س^٢-٤}$

(٣) $د(س) = \frac{\sqrt{س-٣}}{\sqrt{س-٥}}$ (٤) $د(س) = \sqrt{\frac{س-٣}{س-٥}}$

الحل

(١) ∵ $د(س) = \frac{س}{\sqrt{١-س}}$ ⟸ ∵ م$_1$ = ح

م$_2$ = $]-\infty ، ١]$

اصفار دالة المقام عند ١−س = ٠ ∴ اصفار المقام = {١}

∵ مجال الدالة د = (م$_1$ ∩ م$_2$) − {اصفار المقام}

∴ المجال = $]-\infty ، ١]$ − {١} ⟸ ∴ مجال الدالة = $]-\infty ، ١[$

(٢) ∵ $د(س) = \frac{\sqrt{س-٣}}{(س-٢)(س+٢)}$ ∴ م$_1$ = $[٣ ، \infty[$

∴ م$_2$ = ح

اصفار دالة المقام = {−٢ ، ٢} ، م$_1$ ∩ م$_2$ = $[٣ ، \infty[$

∴ مجال الدالة د = $[٣ ، \infty[$ − {−٢ ، ٢} = $[٣ ، \infty[$

(٣) ∵ م$_1$ = $[٣ ، \infty[$ ، م$_2$ = $[٥ ، \infty[$

∴ م$_1$ ∩ م$_2$ = $[٥ ، \infty[$ ، أصفار المقام = {٥}

∴ مجال الدالة د = $]٥ ، \infty[$

(٤) يترك للطالب

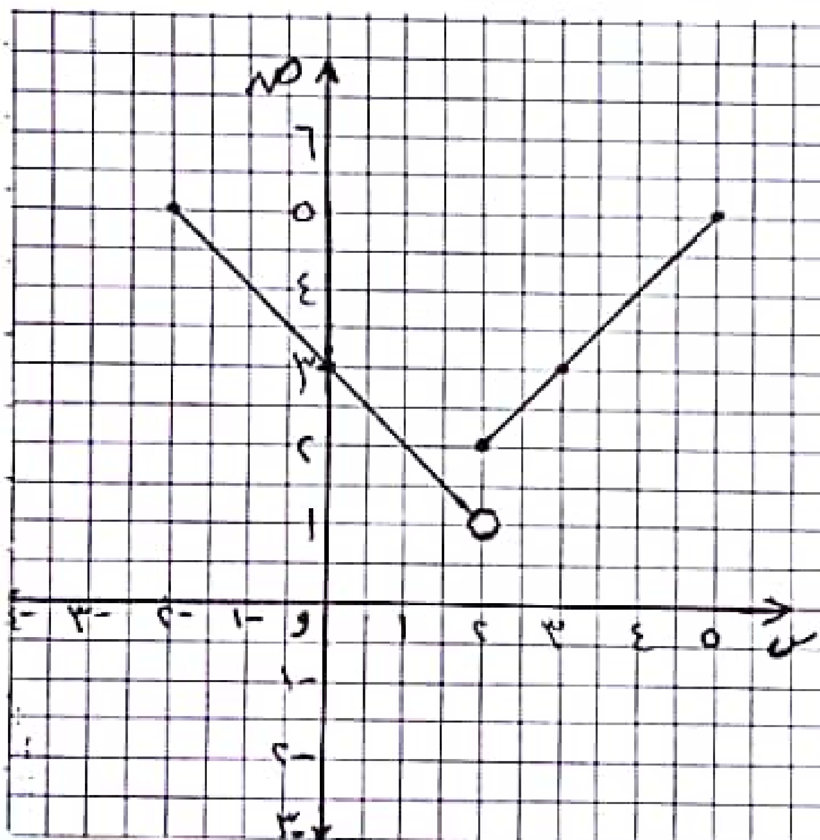
Scanned by CamScanner

مثال ارسم الشكل البياني للدوال الآتية :

(١) د(س) = { ٣ - س عندما -٢ ≤ س < ٢ ، س عندما ٢ ≤ س ≤ ٥ }

(٢) د(س) = { $س^٢$ + ١ عندما -٣ ≤ س < ٠ ، س + ٢ عندما ٠ ≤ س ≤ ٣ }





(١) مجال الدالة = [-٢ ، ٥]

(٢) تعيين المجال ورسم المنحنى يترك للطالب

Scanned by CamScanner

العمليات على الدوال

إذا كانت $د_١$ ، $د_٢$ دالتين مجالهما $م_١$ ، $م_٢$ على الترتيب فإن

(١) $(د_١ \pm د_٢)(س) = د_١(س) \pm د_٢(س)$
ومجالها هو $م_١ \cap م_٢$

(٢) $(د_١ \times د_٢)(س) = د_١(س) \times د_٢(س)$ ومجالها هو $م_١ \cap م_٢$

(٣) $\left(\frac{د_١}{د_٢}\right)(س) = \frac{د_١(س)}{د_٢(س)}$ حيث $د_٢(س) \neq ٠$

مجالها هو $(م_١ \cap م_٢) - \{$أصفار دالة المقام $د_٢\}$
$= م_١ - \{$أصفار بسط ومقام $د_٢\}$

مثال

إذا كانت $د(س) = \frac{س}{س+١}$ ، $ر(س) = \frac{س+١}{س-٢}$ أوجد

(١) $(د+ر)(س)$ موضحاً مجالها ثم اوجد قيمة $(د+ر)(٣)$

(٢) $(د \cdot ر)(س)$ " " " " قيمة $(د \cdot ر)(٣)$

(٣) $(\frac{د}{ر})(س)$ موضحاً مجالها ثم أوجد $(\frac{د}{ر})(-١)$ ، $(\frac{د}{ر})(١)$

الحل

$\because م_١ = ح - \{-١\}$ ، $م_٢ = ح - \{٢\}$

(١) $\therefore (د+ر)(س) = \frac{س}{س+١} + \frac{س+١}{س-٢} = \frac{س(س-٢) + (س+١)^٢}{(س+١)(س-٢)}$

$\therefore (د+ر)(س) = \frac{س^٢ - ٢س + س^٢ + ٢س + ١}{(س+١)(س-٢)} = \frac{٢س^٢ + ١}{(س+١)(س-٢)}$

Scanned by CamScanner

∴ مجال (د + ر)(س) = $م_1 \cap م_2$ = ح - {-٣ ، -١ ، ٢}

∴ (د + ر)(٣) = $\frac{٢ \times ٩ + ١}{٤ \times ١} = \frac{١٩}{٤}$

(٢) ∵ (د · ر)(س) = $\frac{س}{س + ١} \times \frac{س + ١}{س - ٢} = \frac{س}{س - ٢}$

ومجالها = $م_1 \cap م_2$ = ح - {-٣ ، -١ ، ٢}

∴ (د · ر)(٣) = $\frac{٣}{١}$ = ٣

(٣) ∵ $(\frac{د}{ر})$(س) = $\frac{س}{س + ١} \times \frac{س - ٢}{س + ١} = \frac{س(س - ٢)}{(س + ١)^2}$

ومجالها = $(م_1 \cap م_2)$ - {-٣ ، -١} = ح - {-٣ ، -١ ، ٢}

∴ $(\frac{د}{ر})$(-١) = غير معرف لان -١ ∉ مجال $(\frac{د}{ر})$(س)

∴ $(\frac{د}{ر})$(١) = $\frac{١ \times -١}{(٢)^2} = \frac{-١}{٤}$

تركيب الدوال

اذا كانت (د) دالة في س و (ر) دالة في س أيضاً وكان مدى الدالة د تقاطع مجال الدالة ر لا يساوي ∅ فانه يمكن استنتاج دالة جديدة ع تتركب من الدالتين وهي

ع = ر∘د وتكون ع(س) = (ر∘د)(س)

وتقرأ ر تركيب د أو ر بعد د حيث

(ر∘د)(س) = ر(د(س))

Scanned by CamScanner

مثال اذا كانت $د(س) = س^٢$ ، $ر(س) = س + ١$

اوجد (١) $(د ∘ ر)(١)$ (٢) $(د ∘ د)(-١)$ (٣) $(ر ∘ د)(١)$

الحل

(١) ∵ $د(س) = س^٢$ ، $ر(س) = س + ١$

∴ $(د ∘ ر)(س) = د(ر(س)) = (س+١)^٢ = س^٢ + ٢س + ١$

∴ $(د ∘ ر)(١) = (١+١)^٢ = ٤$

(٢) ∵ $(د ∘ د)(س) = د(د(س)) = (س^٢)^٢ = س^٤$

∴ $(د ∘ د)(-١) = (-١)^٤ = ١$

(٣) ∵ $(ر ∘ د)(س) = ر(د(س)) = س^٢ + ١$

∴ $(ر ∘ د)(١) = ١ + ١ = ٢$

مجال دالة التركيب

* لتعيين مجال الدالة $(د ∘ ر)$ نتبع الاتي

(١) نوجد مجال الدالة الثانية ر وليكن $م_١$

(٢) نوجد مجال الدالة الاولى د وليكن م

(٣) نوجد قيم س التي تجعل الدالة الثانية ر(س) في مجال الدالة الاولى د وليكن $م_٢$

* ولتعيين هذه القيم نضع ر(س) ∈ مجال الدالة د ومن خلال هذه العلاقة نوجد $م_٢$

(٤) مجال دالة التركيب $(د ∘ ر) = م_١ ∩ م_٢$

مثال اذا كانت $د(س) = \frac{١}{س}$ ، $ر(س) = س + ٣$

اوجد $(د ∘ ر)(س)$ ، $(ر ∘ د)(س)$ وحدد مجال كل منها

الحل

∵ $ر(س) = س + ٣$ ∴ $م_١ = ح$ ← (١)

∵ د(س) = $\frac{1}{س}$ ∴ مجال الدالة د = ح − {٠}

∴ (د ∘ ر)(س) = د(ر(س)) = $\frac{1}{س+٣}$ ⟵ ②

* لإيجاد م٢ (قيم س التي تجعل ر(س) في مجال الدالة د)
نضع ر(س) ∈ مجال الدالة د

∴ س + ٣ ∈ ح − {٠} ⟸ منها س + ٣ ≠ ٠

∴ س ≠ −٣ ⟸ ∴ م٢ = ح − {−٣} ⟵ ③

∵ مجال دالة التركيب (د ∘ ر) = م١ ∩ م٢

∴ المجال = ح ∩ (ح − {−٣}) ∴ المجال = ح − {−٣}

(٢) ∵ د(س) = $\frac{1}{س}$ ∴ م١ = ح − {٠} ⟵ ①

∵ ر(س) = س + ٣ ∴ مجال الدالة ر = ح

∴ (ر ∘ د)(س) = ر(د(س)) = $\frac{1}{س}$ + ٣ ⟵ ②

* لإيجاد م٢ نضع د(س) ∈ مجال الدالة ر

∴ $\frac{1}{س}$ ∈ ح ⟸ ∴ منها س ≠ ٠

∴ م٢ = ح − {٠} ⟵ ③

∴ مجال دالة التركيب (ر ∘ د) = م١ ∩ م٢

∴ المجال = (ح − {٠}) ∩ (ح − {٠}) = ح − {٠}

مثال

إذا كانت د(س) = س² − ٣ ، ر(س) = $\sqrt{س-٢}$
أوجد (د ∘ ر) محدداً مجالها ثم أوجد (د ∘ ر)(٢)

الحل

∵ ر(س) = $\sqrt{س-٢}$ ∴ م١ = [٢ ، ∞[⟵ ①

∵ $د(س) = س^2 - 3$ ∴ مجال الدالة د = ح

∴ $(د \circ ر)(س) = د\left(ر(س)\right) = \left(\sqrt{س-2}\right)^2 - 3$

∴ $(د \circ ر)(س) = س - 5$ ← (٢)

* لايجاد $م_2$ نضع $ر(س) \in$ مجال الدالة د

∴ $\sqrt{س-2} \in ح$ منها $س \geq 2$ ∴ $م_2 = [2, \infty[$ (٣)

∴ مجال دالة التركيب $(د \circ ر) = م_1 \cap م_2$

∴ المجال $= [2, \infty[\cap [2, \infty[$ ∴ المجال $= [2, \infty[$

∴ $(د \circ ر)(2) = 2 - 5 = -3$

مثال اذا كانت $د(س) = \sqrt{س-2}$ ، $ر(س) = \sqrt{4-س}$

اوجد $د \circ ر$ موضحاً مجالها

الحل

∵ $ر(س) = \sqrt{4-س}$ ∴ $م_1 =]-\infty, 4]$ ← (١)

∵ $د(س) = \sqrt{س-2}$ ∴ مجال الدالة د $= [2, \infty[$

∴ $(د \circ ر)(س) = د\left(ر(س)\right) = \sqrt{\sqrt{4-س} - 2}$ ← (٢)

* لايجاد $م_2$ نضع $ر(س) \in$ مجال الدالة د

∴ $\sqrt{4-س} \in [2, \infty[$ ∴ $\sqrt{4-س} \geq 2$

∴ $4 - س \geq 4$

منها $-س \geq 0$ ⟸ ∴ $س \leq 0$ ∴ $م_2 =]-\infty, 0]$ ← (٣)

∴ مجال دالة التركيب $(د \circ ر) = م_1 \cap م_2$

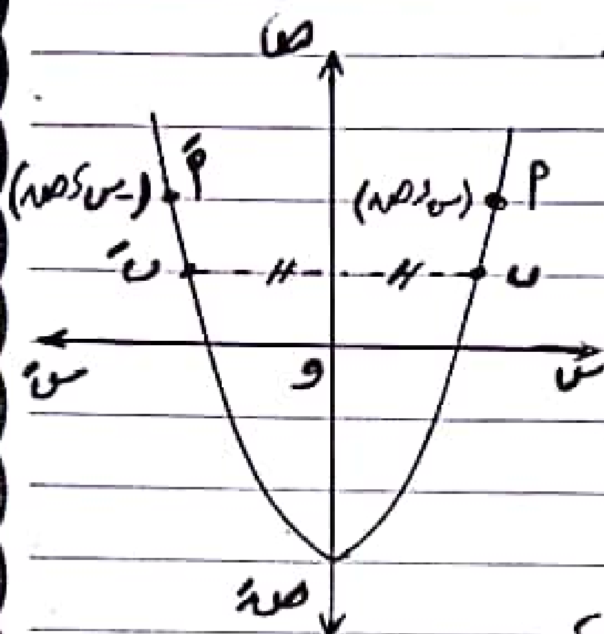
∴ المجال $=]-\infty, 4] \cap]-\infty, 0]$

∴ المجال $=]-\infty, 0]$

Scanned by CamScanner

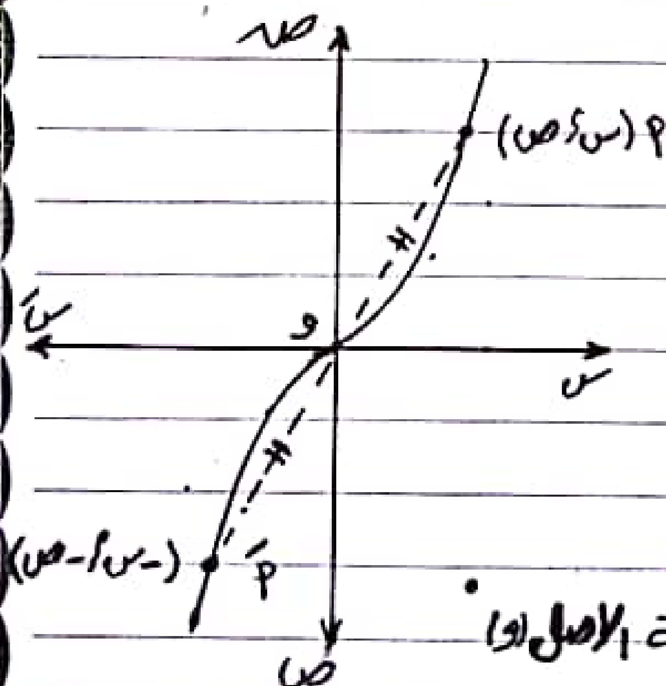
بعض خواص الدوال

* التماثل حول محور الصادات :-



يكون الشكل البياني لمنحنى دالة متماثلاً حول محور الصادات اذا كان لكل نقطة أ (س ، ص) ∈ المنحنى توجد نقطة أخرى أ َ (-س ، ص) ∈ المنحنى بحيث تكون أ َ هي صورة أ بالانعكاس في محور الصادات

* التماثل حول نقطة الاصل :-



يكون الشكل البياني لمنحنى دالة متماثلاً حول نقطة الاصل اذا كان لكل نقطة أ (س ، ص) ∈ المنحنى توجد نقطة أخرى أ َ (-س ، -ص) ∈ المنحنى بحيث تكون أ َ هي صورة أ بالانعكاس في نقطة الاصل (و)

الدالة الزوجية

يقال أن الدالة د زوجية اذا كان لكل س ، -س ∈ مجال الدالة د يكون د(-س) = د(س) ويكون منحنى الدالة متماثلاً حول محور الصادات

Scanned by CamScanner

الدالة الفردية

يقال أن الدالة د فردية اذا كان لكل س ، -س ∈ مجال الدالة د يكون د(-س) = -د(س) ويكون منحنى الدالة متماثلاً حول نقطة الأصل

ملاحظات هامة

(١) اذا كانت د(-س) ≠ د(س) ، د(-س) ≠ -د(س)
فان الدالة د ليست زوجية وليست فردية

(٢) اذا كانت س ، -س ∉ مجال الدالة فان الدالة د تكون ليست فردية وليست زوجية

مثال

ابحث نوع الدوال الاتية من حيث كونها زوجية أم فردية

(١) د(س) = ٣س^{٢} (٢) د(س) = س^{٢} ، س ∈ [٠، ٦]

(٣) د(س) = ٢س^{٣} (٤) د(س) = $\sqrt{س - ١}$

(٥) د(س) = جتاس (٦) د(س) = حاس

الحل

(١) ∵ د(س) = ٣س^{٢} ∴ مجال الدالة = ح

∴ بفرض أن س ، -س ∈ مجال الدالة فإنه

د(-س) = ٣(-س)^{٢} = ٣س^{٢} = د(س) ← الدالة زوجية

(٢) د(س) = س^{٢} ، س ∈ [٠، ٦] ∴ مجال الدالة = [٠، ٦]

∴ لكل س ∈ مجال الدالة فإنه -س ∉ مجال الدالة

∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية

(٣) ∵ د(س) = ٢س^{٣} ∴ مجال الدالة = ح

∴ د(-س) = ٢ × (-س)^{٣} = -٢س^{٣} = -د(س) ← الدالة فردية

Scanned by CamScanner

(٤) ∵ د(س) = $\sqrt{س - ١}$ ∴ مجال الدالة [١ ، ∞ [

∴ لكل س ∈ [١ ، ∞ [لا يوجد بالضرورة −س ∈ [١ ، ∞ [

∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية

(٥) ∵ د(س) = جتا س ∴ مجال الدالة = ح

وبفرض أن س ، −س ∈ ح فإن

د(−س) = جتا (−س) = جتا س = د(س) ← الدالة زوجية

(٦) ∵ د(س) = جا س ∴ مجالها = ح

وبفرض أن س ، −س ∈ ح فإن

د(−س) = جا(−س) = − جا س = − د(س) ← الدالة فردية

مثال

ابحث نوع الدوال الآتية من حيث كونها زوجية أم فردية

(١) د(س) = $\sqrt{س^٢ + ٦}$ (٢) د(س) = $\sqrt[٣]{س^٣ + س}$

(٣) د(س) = $س^٣ - \frac{١}{س}$ (٤) د(س) = س جتا س

الحل

(١) ∵ د(س) = $\sqrt{س^٢ + ٦}$ ∴ مجال الدالة = ح

وبفرض أن س ، −س ∈ مجال الدالة فإن

د(−س) = $\sqrt{(-س)^٢ + ٦}$ = $\sqrt{س^٢ + ٦}$ = د(س) ← الدالة زوجية

(٢) ∵ د(س) = $\sqrt[٣]{س^٣ + س}$ ∴ مجال الدالة = ح

وبفرض أن س ، −س ∈ ح فإن

د(−س) = $\sqrt[٣]{(-س)^٣ + (-س)}$ = $\sqrt[٣]{-س^٣ - س}$ = $-\sqrt[٣]{س^٣ + س}$

= − د(س) ← الدالة فردية

Scanned by CamScanner

(٣) ∵ د(س) = س^{٣} − $\frac{1}{س}$ مجالها = ح − {٠}

∴ بفرض أن لكل س ∈ مجال الدالة يوجد −س ∈ مجال الدالة

∴ د(−س) = (−س)^{٣} − $\frac{1}{-س}$ = −س^{٣} + $\frac{1}{س}$

= −[س^{٣} − $\frac{1}{س}$] = −د(س) ← الدالة فردية

(٤) ∵ د(س) = س جتا س ← مجال الدالة = ح

∴ د(−س) = −س جتا(−س) = −س جتا س

= −(س جتا س) = −د(س) ← الدالة فردية

مثال ابحث نوع الدوال الآتية من حيث كونها زوجية أم فردية

(١) د(س) = { ٢س ، س ≥ ٠ ، −٢س ، س < ٠ }   (٢) د(س) = { ٢س + س^{٢} ، س ≥ ٠ ، ٢س − س^{٢} ، س < ٠ }

الحل

(١) مجال الدالة = ح وبفرض أن س ، −س ∈ مجال الدالة

∴ د(−س) = { ٢(−س) ، −س ≥ ٠ ، −٢(−س) ، −س < ٠ }   ∴ د(−س) = { −٢س ، س ≤ ٠ ، ٢س ، س > ٠ }

∴ د(−س) = { ٢س ، س ≥ ٠ ، −٢س ، س < ٠ } = د(س) ← الدالة زوجية

(٢) د(−س) = { ٢(−س) + (−س)^{٢} ، −س ≥ ٠ ، ٢(−س) − (−س)^{٢} ، −س < ٠ } = { −٢س + س^{٢} ، س ≤ ٠ ، −٢س − س^{٢} ، س > ٠ }

∴ د(−س) = { −(٢س + س^{٢}) ، س ≥ ٠ ، −(٢س − س^{٢}) ، س < ٠ } = −د(س) ← الدالة فردية

Scanned by CamScanner

ملاحظات هامة

(١) اذا كانت د(س) زوجية فى فترة ما [ب، ﻫ] فان ب = − ﻫ ، ب + ﻫ = صفر

(٢) الدالة الزوجية متماثلة حول محور الصادات (المستقيم س = ٠)

(٣) اذا كانت الدالة د زوجية فان د(−ب) = د(ب)
وبالتالى يكون د(ب) + د(−ب) = ٢ د(ب) = ٢ د(−ب)

(٤) اذا كانت د دالة فردية فان د(−ب) = −د(ب)
وبالتالى د(ب) + د(−ب) = صفر

(٥) اذا كانت الدالة د زوجية على الفترة [ب، ﻫ]
فان د(ب + م) = د(ﻫ − م)

مثال

أكمل ما يأتى

(١) اذا كانت د دالة زوجية فان د(٢) + د(−٢) = ...

(٢) اذا كانت د دالة فردية فان د(٢) + د(−٢) = ...

(٣) اذا كانت د دالة زوجية فى الفترة [ب، ﻫ] فان ﻫ = ...

(٤) اذا كانت د دالة فردية ، د(١) = ٢ فالنقطة (−١، .....) تنتمى الى منحنى الدالة

(٥) اذا كانت د دالة زوجية وكان د(١) = ٢ فان النقطة (−١، .....) تنتمى الى منحنى الدالة

الحل

(١) ٢ د(٢) = ٢ د(−٢)   (٢) صفر

(٣) ﻫ = −ب

(٤) ∵ د فردية ∴ د(−١) = −د(١) = −٢ ∴ النقطة (−١، −٢)

(٥) ∵ د زوجية ∴ د(−١) = د(١) = ٢ ∴ النقطة (−١، ٢)

Scanned by CamScanner

الدوال الأحادية

الدالة د: س ← ص تسمى دالة احادية اذا كان لكل $أ، ب \in$ لمجال س بحيث د(أ) = د(ب) فإن أ = ب
اى أنه لا يوجد عنصران فى مجال الدالة الاحادية لهما نفس الصورة
اى عندما نرسم اى خط افقى لا ابد أن يقطع منحنى الدالة الاحادية فى نقطة واحدة فقط

مثال أثبت أن الدوال الاتيه دوال أحادية :
(١) د(س) = ٢س - ٥ (٢) د(س) = $\frac{٢س - ٣}{٣س + ٢}$

الحل

(١) ∵ د(س) = ٢س - ٥ وبفرض أن أ، ب $\in$ مجال الدالة
فإن د(أ) = د(ب) ∴ ٢أ - ٥ = ٢ب - ٥
منها أ = ب ⟸ الدالة أحادية

(٢) ∵ د(س) = $\frac{٢س - ٣}{٣س + ٢}$ وبفرض أن أ، ب $\in$ مجال الدالة
بحيث د(أ) = د(ب) ⟸ ∴ $\frac{٢أ - ٣}{٣أ + ٢} = \frac{٢ب - ٣}{٣ب + ٢}$
∴ ٦أب + ٤أ - ٩ب - ٦ = ٦أب - ٩أ + ٤ب - ٦
∴ ٤أ - ٩ب = -٩أ + ٤ب ⟸ ١٣أ = ١٣ب ⟸ أ = ب
∴ الدالة أحادية

ملاحظات هامة

(١) كل الدوال الزوجية ليست أحادية

Scanned by CamScanner

(٢) اذا وجد عنصران في مجال الدالة لهما نفس الصورة كانت الدالة ليست احادية مثلا اذا كان (a ، ص) ، (b ، ص) تقعان على منحنى الدالة د فإن الدالة د ليست احادية لان العنصران a ، b لهما نفس الصورة

مثال ابحث نوع الدوال الاتية من حيث كونها أحادية أم لا

(١) د(س) = ٢س^2 − ١ (٢) د(س) = س^2 + س

الحل

(١) ∵ د(س) = ٢س^2 − ١ ونفرض أن a ، b ∈ مجال الدالة بحيث د(a) = د(b) ∴ ٢a^2 − ١ = ٢b^2 − ١

∴ a^2 = b^2 منها a = ± b ⟸ ∴ الدالة ليست أحادية

(٢) ∵ د(س) = س^2 + س ونفرض أن a ، b ∈ مجال الدالة بحيث د(a) = د(b) ∴ a^2 + a = b^2 + b

∴ a^2 − b^2 = b − a ∴ (a − b)(a + b) − (b − a) = ٠

∴ (a − b) [a + b + ١] = ٠ منها a = b

a = − b − ١

∴ الدالة ليست أُحادية

مثال بين نوع الدوال الاتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو أحادية أو غير ذلك

(١) د(س) = س + ٢

(٢) د : ح$^+$ ⟵ ح حيث د(س) = س^2

(٣) د : ح$^+$ ⟵ ح$^+$ حيث د(س) = ٣س^2

(٤) د : [−٣ ، ٣] ⟵ ح حيث د(س) = س^2

Scanned by CamScanner

الحل

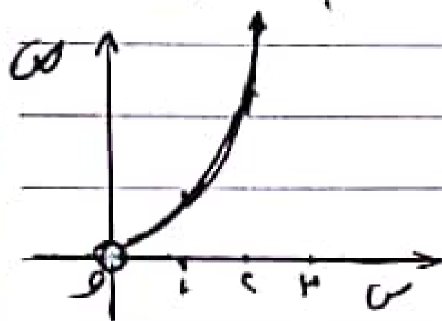
(١) ∵ $د(س) = س + ٢$ مجالها = ح وهي دالة كثيرة

∴ $د(-س) = -س + ٢ = -[س - ٢] \neq -د(س)$

الدالة ليست زوجية وليست فردية ولكنها احادية

(٢) ∵ $د: ص^+ \longleftarrow ص$ حيث $د(س) = س^٢$

الدالة مجالها $ص^+$ ← ∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية



ومن الرسم البياني نجد أن الدالة احادية

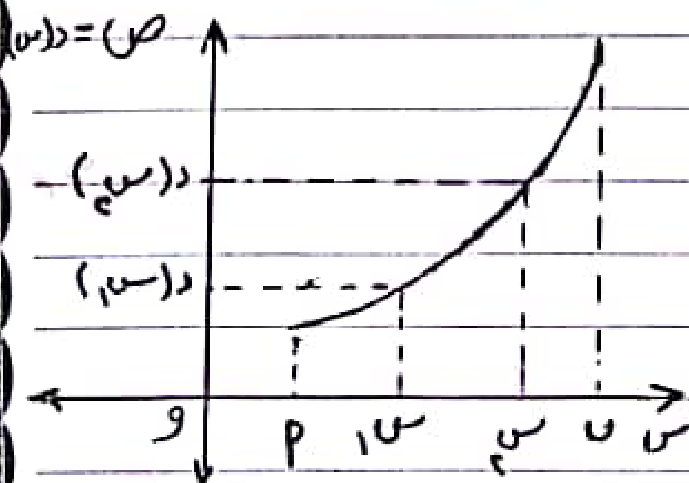
(٣) يترك للطالب

(٤) يترك للطالب

اطراد الدوال

يقصد ببحث اطراد دالة ما هو تحديد الفترات من مجالها التي تكون فيها الدالة تزايدية والفترات التي تكون فيها الدالة تناقصية والفترات التي تكون فيها الدالة ثابتة

(١) تزايد الدالة :-

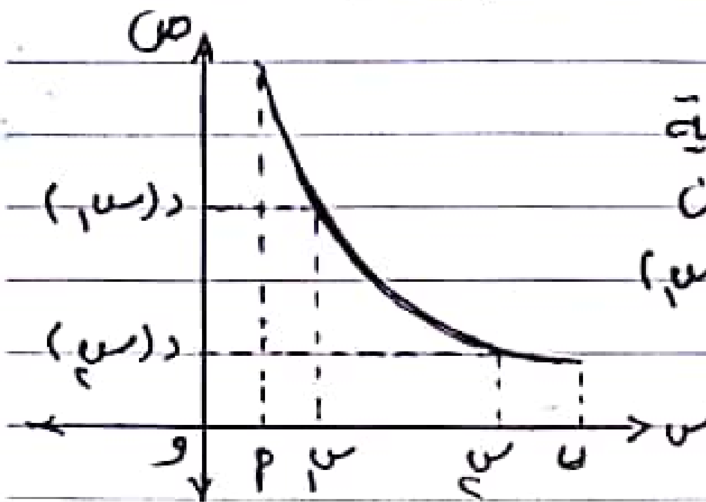


يقال أن الدالة د تزايدية في الفترة]ﻫ ، ب[اذا كان لكل $س_٢ > س_١ \Longleftarrow د(س_٢) > د(س_١)$

لكل $س_١ ، س_٢ \in]ﻫ ، ب[$

Scanned by CamScanner

(٢) تناقص الدالة :-



يقال أن الدالة د تناقصية في الفترة]أ، ب[اذا كان لكل $س_٢ > س_١ \Leftarrow د(س_٢) < د(س_١)$

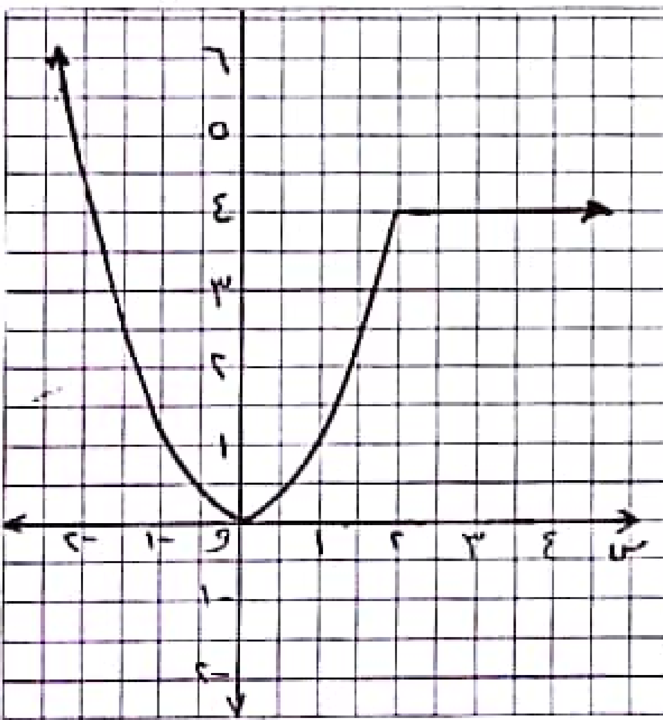
لكل $س_١، س_٢ \in]أ، ب[$

(٣) ثبوت الدالة :- يقال أن الدالة د ثابته في الفترة]أ، ب[اذا كان $س_٢ > س_١ \Leftarrow د(س_٢) = د(س_١)$

اى أن منحنى الدالة يوازى محور السينات في هذه الفترة

مثال

في الشكل المقابل ابحث اطراد الدالة :-



الحل

∵ مجال الدالة = ح

الدالة تناقصية على الفترة]-∞، ٠[وتزايدية في الفترة]٠، ٢[وثابتة في الفترة]٢، ∞[

* ملاحظة هامة :-

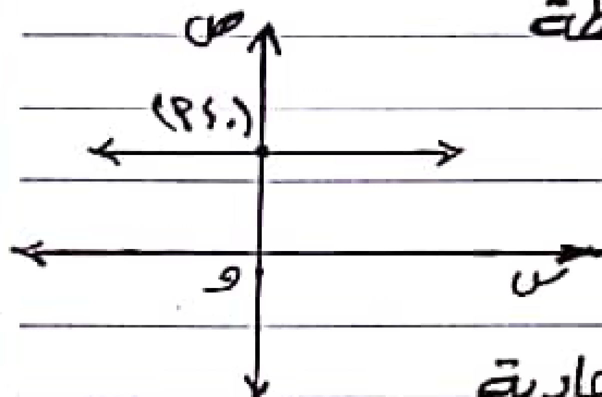
اذا كانت الدالة في تزايد مستمر أو في تناقص مستمر على مجالها يقال أن الدالة احادية

Scanned by CamScanner

التمثيل البياني للدوال والتحويلات الهندسية

(١) الدالة الثابتة :.

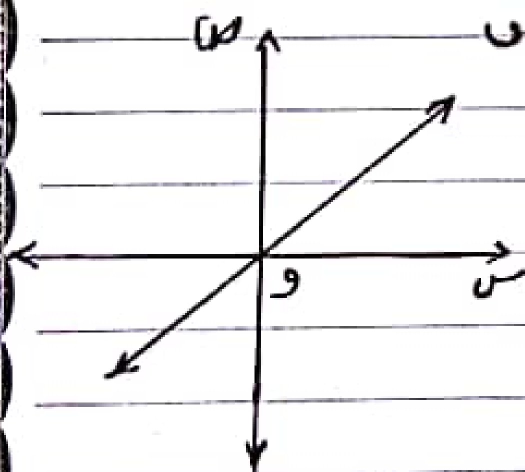
الصورة الأساسية د : ح ⟵ ح ، د(س) = م حيث م ∈ ح
يمثلها بيانياً خط مستقيم يوازي محور السينات
ويقطع محور الصادات في النقطة
(٠ ، م)



مجال الدالة = ح
مدى الدالة = {م}
الدالة زوجية
الدالة ثابتة والدالة ليست أحادية

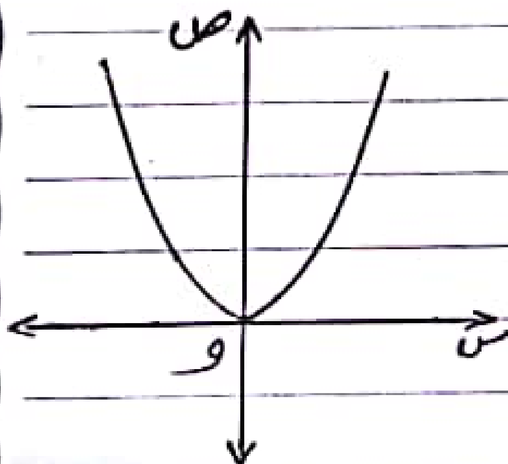
(٢) الدالة الخطية :.

الصورة الأساسية د(س) = س
يمثلها بيانياً خط مستقيم يمر
بنقطة الأصل وميله = ١



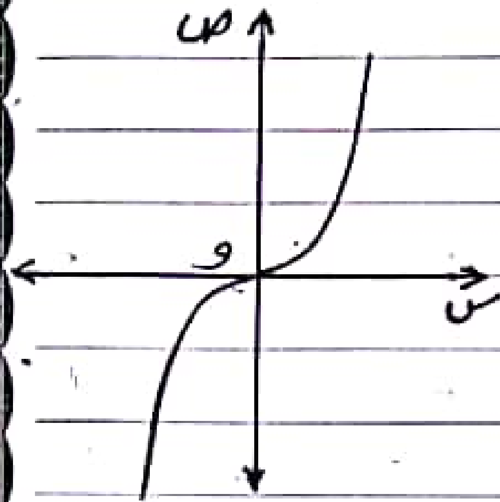
مجال الدالة = ح
مدى الدالة = ح
الدالة فردية - الدالة تزايدية
على مجالها - الدالة أحادية

(٣) الدالة التربيعية :-



الصورة الأساسية د(س) = س²
مجالها = ح ومداها = [٠ ، ∞[
الدالة زوجية - الدالة تزايدية
على [٠ ، ∞[وتناقصية على]-∞ ، ٠]
الدالة ليست أحادية

Scanned by CamScanner



(٤) الدالة التكعيبية :-

الصورة الاساسية د(س) = $س^٣$

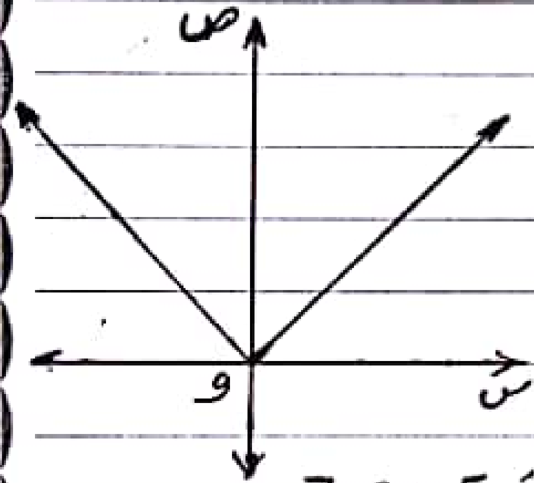
مجالها = ح ومداها = ح

الدالة فردية - الدالة تزايدية

فى]-∞، ٠[وتزايدية على]٠، ∞[

الدالة تزايديه على مجالها

الدالة احادية



(٥) دالة المقياس :-

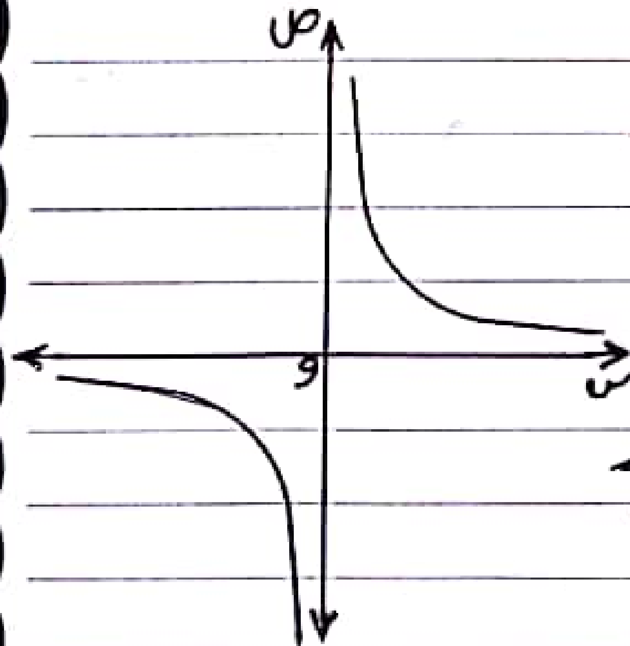
الصورة الاساسية د(س) = |س|

∴ د(س) = { س عندما س ≥ ٠ ، -س عندما س < ٠ }

مجال الدالة = ح ومداها = [٠، ∞[

الدالة زوجية - الدالة تناقصية فى]-∞، ٠[

وتزايدية فى]٠، ∞[- الدالة ليست احادية



(٦) الدالة الكسرية :-

الصورة الاساسية د(س) = $\frac{١}{س}$

مجالها = ح - {٠}

مداها = ح - {٠}

الدالة فردية

الدالة تناقصية فى]-∞، ٠[

وتناقصية فى]٠، ∞[ايضاً

الدالة احادية

Scanned by CamScanner

التحويلات الهندسية لمنحنيات الدوال

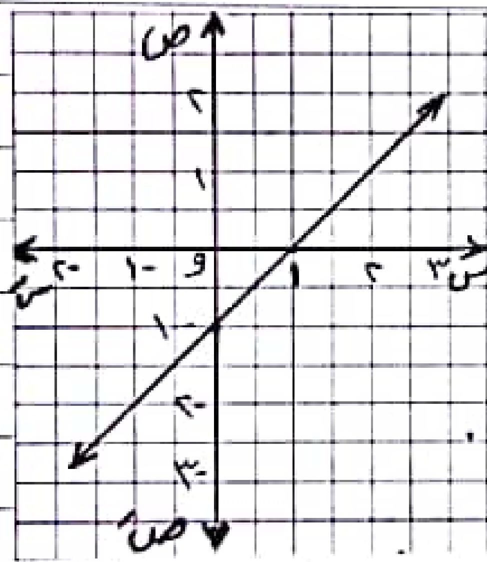
(1) الدالة الخطية :-

الصورة العامة د(س) = أس + ب

مثال

استخدم منحنى الدالة د(س) = س لرسم منحنى الدالة ر(س) = س - ١ ثم ادرس هذه الدالة

الحل



منحنى الدالة ر(س) = س - ١

هو نفس منحنى الدالة د(س) = س

بإزاحة رأسية مقدارها

وحدة واحدة في اتجاه وص←

مجال الدالة = ح ومداها = ح

الدالة تزايدية على مجالها

الدالة ليست زوجية وليست فردية

الدالة احادية

(2) الدالة التربيعية :-

الصورة العامة هي د(س) = أ(س + ب)^2 + جـ

(1) اذا كانت أ > ١ فإن منحنى الدالة د(س) هو تمدد رأسي لمنحنى الدالة ر(س) = س^2

(2) اذا كانت ٠ < أ < ١ فإن منحنى الدالة د(س) هو انكماش رأسي لمنحنى الدالة ر(س) = س^2

(3) اذا كانت أ < ٠ فإن منحنى الدالة د(س) هو انعكاس لمنحنى الدالة ر(س) = س^2 في محور السينات

Scanned by CamScanner

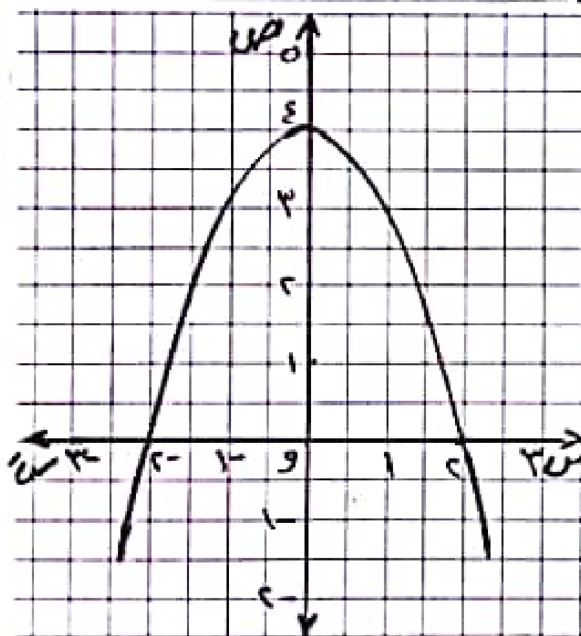
(٤) نقطة رأس المنحنى = (- ب ، حـ) حيث
الاحداثى السينى لنقطة راس المنحنى يمثل الازاحة الافقية لمنحنى الدالة بينما الاحداثى الصادى يمثل الازاحة الرأسية

* يكون ترتيب التحويلات الهندسية كالتالى تمدد - انعكاس - ازاحة افقية - ازاحة رأسية

مثال

استخدم منحنى الدالة د(س) = س^2 فى رسم منحنى الدالة ر(س) = - س^2 + ٤ ثم ادرس الدالة

الحل



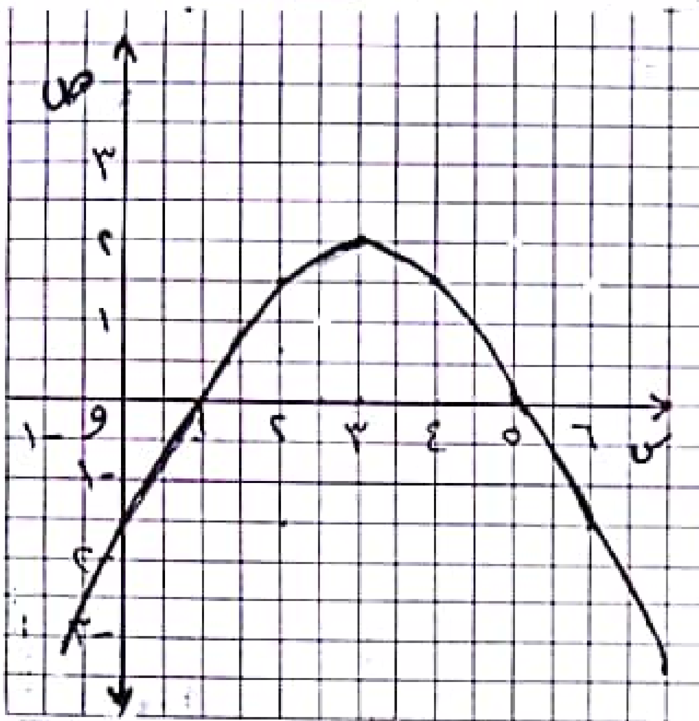
∵ ر(س) = -(س - ٠)^2 + ٤
∴ أ = -١ ، ب = ٠ ، حـ = ٤
∴ نقطة رأس المنحنى = (٠ ، ٤)
∴ منحنى الدالة ر(س) = -س^2 + ٤
هو انعكاس لمنحنى الدالة د(س) = س^2
يتبعة ازاحة رأسية مقدارها ٤ وحدات فى اتجاه وص
مجال الدالة = ح
مدى الدالة =]-∞ ، ٤]
الدالة زوجية وليست احادية والدالة تزايدية فى الفترة]-∞ ، ٠[وتناقصية فى الفترة]٠ ، ∞[

مثال

استخدم منحنى الدالة د(س) = س^2 فى رسم منحنى الدالة ر(س) = ٢ - $\frac{1}{2}$(س - ٣)^2 ثم ادرس هذه الدالة

الحل

Scanned by CamScanner



∵ $د(س) = ٢ - \frac{١}{٢}(س - ٣)^٢$

∴ $أ = -\frac{١}{٢}$ ، $ب = -٣$ ، $هـ = ٢$

∴ نقطة رأس المنحنى = (٣ ، ٢)

∴ منحنى الدالة د(س) هو انعكاس لمنحنى الدالة $د(س) = س^٢$ يتبعه انعكاس في محور السينات يتبعه ازاحة أفقية مقدارها ٣ وحدات في اتجاه $\overleftarrow{و س}$ ثم ازاحة رأسية مقدارها ٢ وحدة في اتجاه $\overleftarrow{و ص}$

مجال الدالة = ح ومداها =]-∞ ، ٢] - الدالة ليست زوجية وليست فردية وليست احادية - الدالة تزايدية في]-∞ ، ٣[وتناقصية في الفترة]٣ ، ∞[

مثال

بدون رسم منحنى الدالة د(س) اذكر التحويلات الهندسية التي طرأت عليها اذا كان

(١) $د(س) = س^٢ + ٤س + ١$ (٢) $د(س) = (٢س - ٣)^٢ - ١$

الحل

(١) ∵ $د(س) = س^٢ + ٤س + ١$ ∴ $أ = ١$ ، $ب = ٤$ ، $هـ = ١$

∴ $س = \frac{-ب}{٢أ} = \frac{-٤}{٢} = -٢$ ص $= (-٢)^٢ + ٤ \times -٢ + ١ = -٣$

∴ نقطة رأس المنحنى = (-٢ ، -٣)

∴ منحنى الدالة د(س) هو نفس منحنى الدالة $د(س) = س^٢$ بإزاحة أفقية قدرها ٢ وحدة في اتجاه $\overleftarrow{و س}$ ثم ازاحة رأسية قدرها ٣ في اتجاه و ص

مجال الدالة = ح ومداها = [-٣ ، ∞[الدالة ليست زوجية وليست فردية

(٢) يترك للطالب

Scanned by CamScanner

(٣) الدالة التكعيبية :-

الصورة العامة ر(س) = أ (س + ب)^{٣} + جـ

نقطة تماثل المنحنى = (-ب ، جـ)

* كما في الدالة التربيعية من أ نحدد الانعكاس والتمدد والانكماش ومن نقطة تماثل المنحنى نحصل على الإزاحة الأفقية والرأسية

مثال

استخدم منحنى الدالة د(س) = س^{٣} في رسم منحنى الدالة ر(س) = (س - ١)^{٣} - ٢ ثم ادرس الدالة

الحل

∵ ر(س) = (س - ١)^{٣} - ٢

∴ أ = ١ ب = -١ جـ = -٢

∴ نقطة تماثل المنحنى = (١ ، -٢)

∴ منحنى الدالة ر(س) هو نفس منحنى الدالة د(س) = س^{٣} بإزاحة أفقية مقدارها ١ وحدة في اتجاه $\overrightarrow{س}$ يتبعها إزاحة رأسية مقدارها ٢ وحدة في اتجاه $\overleftarrow{ص}$

مجال الدالة = ح ومداها = ح

الدالة ليست زوجية وليست فردية ولكنها دالة احادية

الدالة تزايدية على مجالها

* تدريب :-

استخدم منحنى الدالة د(س) = س^{٣} في رسم منحنى الدالة ر(س) = -٢(س - ٢)^{٣} + ١ ثم ادرس هذه الدالة

(٤) الدالة الكسرية :-

الصورة العامة للدالة الكسرية $د(س) = \frac{أ}{س + ب} + حـ$

مجالها = ح - {-ب}

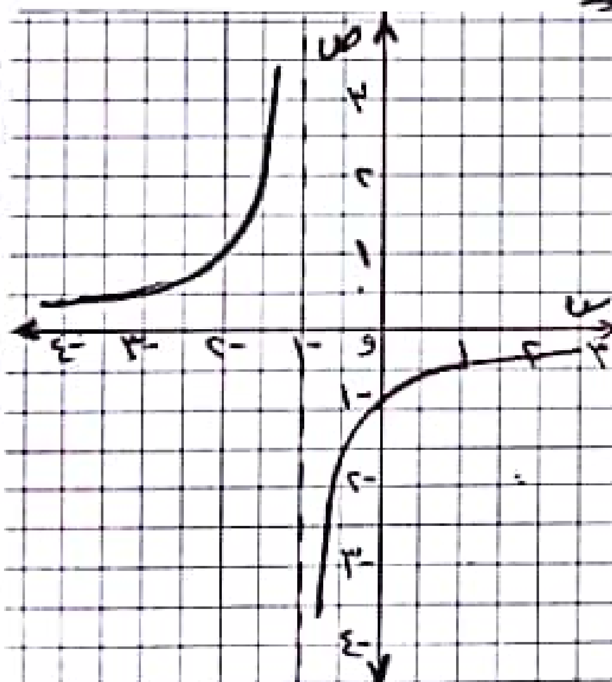
مداها = ح - {حـ} ، نقطة تماثل المنحنى = (-ب ، حـ)

* كما في الدالة التربيعية من أ نحدد الانعكاس والتمدد والانكماش ومن نقطة تماثل المنحنى نحدد الإزاحة الأفقية والرأسية

مثال

استخدم منحنى الدالة $د(س) = \frac{١}{س}$ في رسم منحنى الدالة $ر(س) = \frac{-١}{س + ١}$ ثم ادرس الدالة

الحل



∵ $ر(س) = \frac{-١}{س + ١}$

∴ أ = -١ ، ب = ١ ، حـ = صفر

∴ نقطة تماثل المنحنى = (-١ ، ٠)

∴ منحنى الدالة ر(س) هو انعكاس لمنحنى الدالة $د(س) = \frac{١}{س}$ يتبعه ازاحة افقية مقدارها ١ وحدة في اتجاه $\overleftarrow{و س}$

مجال الدالة = ح - {-١}

مدى الدالة = ح - {٠}

الدالة ليست زوجية وليست فردية ولكنها أحادية

الدالة تزايدية على الفترة]-∞ ، -١[،]-١ ، ∞[

مثال

استخدم منحنى الدالة $د(س) = \frac{١}{س}$ في رسم منحنى الدالة $ر(س) = \frac{٣س - ٥}{س - ٢}$ ثم ادرس الدالة

Scanned by CamScanner

الحل

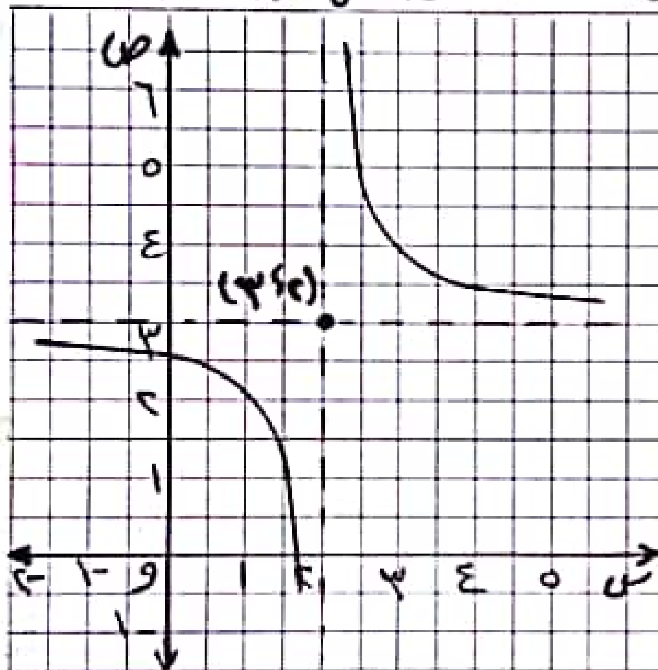
∵ $د(س) = \frac{٣س - ٥}{س - ٢}$ ليست على الصورة العامة

بإجراء القسمة المطولة

$$\begin{array}{r|l} ٣ & \\ \hline ٣س - ٥ & س - ٢ \\ ٣س - ٦ & \\ \hline ٠ \quad +١ & \end{array}$$

∴ $د(س) = ٣ + \frac{١}{س - ٢}$

⇐ نقطة تماثل المنحنى = (٢، ٣)



∴ أ = ١، ب = -٢، حـ = ٣

∴ منحنى الدالة د(س) هو نفس منحنى الدالة $د(س) = \frac{١}{س}$ بإزاحة أفقية قدرها ٢ في اتجاه $\overrightarrow{وس}$ يتبعها إزاحة رأسية قدرها ٣ وحدات في اتجاه $\overrightarrow{وص}$

مجال الدالة = ح - {٢}

مدى الدالة = ح - {٣}

الدالة ليست زوجية وليست فردية ولكنها دالة أحادية

الدالة تناقصية على الفترتين]-∞، ٢[،]٢، ∞[

(٥) دالة المقياس :-

الصورة العامة هي $د(س) = أ|س + ب| + حـ$

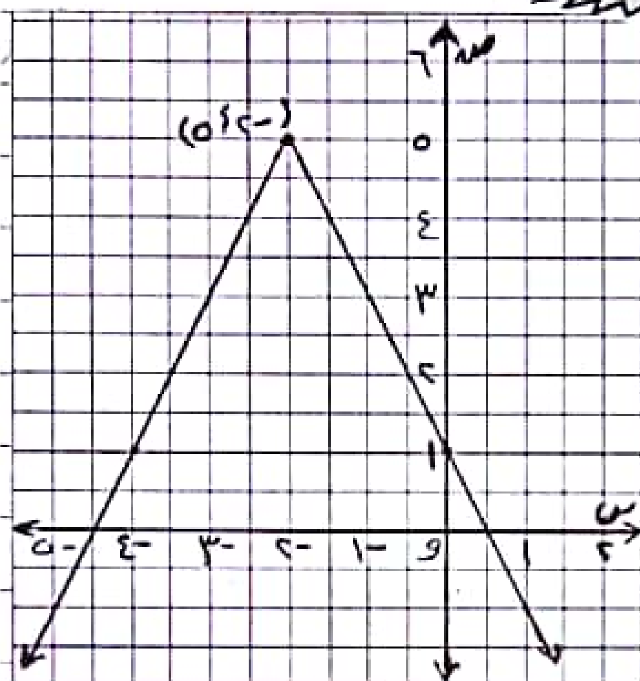
مجالها = ح ونقطة رأس المنحنى = (-ب، حـ)

* كما في الدالة التربيعية مع أ تحدد الانعكاس والتمدد والانكماش الرأسي ونقطة رأس المنحنى تحدد الإزاحة الأفقية والرأسية

Scanned by CamScanner

مثال استخدم منحنى الدالة د(س) = |س| في رسم منحنى الدالة ر(س) = ٥ - ٢|س + ٢| ثم ادرس الدالة

الحل



∵ ر(س) = ٥ - ٢|س + ٢|

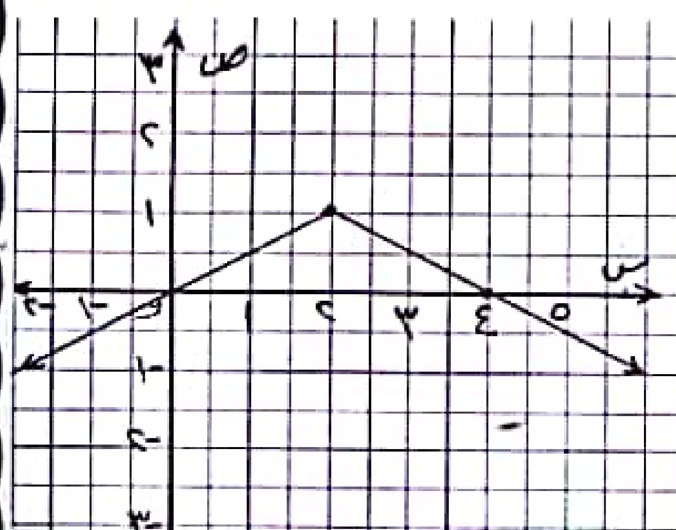
∴ أ = -٢ ، ب = -٢ ، حـ = ٥

∴ نقطة رأس المنحنى = (-٢، ٥)

∴ منحنى الدالة ر(س) هو تمدد رأسي لمنحنى الدالة د(س) = |س| يتبعه انعكاس في محور السينات يتبعه ثم ازاحة أفقية قدرها ٢ وحدة في اتجاه و س← ثم ازاحة رأسية قدرها ٥ وحدات في اتجاه و ص↑

مجال الدالة = ح ومداها =]-∞، ٥] الدالة ليست زوجية أو فردية أو أحادية، الدالة تزايدية في الفترة]-∞، -٢[وتناقصية في الفترة]-٢، ∞[

مثال استخدم منحنى الدالة د(س) = |س| في رسم منحنى



الدالة ر(س) = ١ - |½س - ١|

∴ ر(س) = ١ - |½(س - ٢)|

∴ ر(س) = ١ - ½|س - ٢|

∴ أ = -½ ، ب = -٢ ، حـ = ١

نقطة رأس المنحنى = (٢، ١)

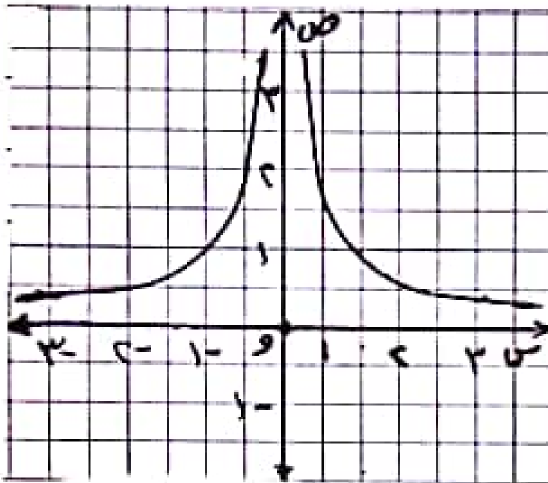
* دراسة الدالة يترك للطالب

Scanned by CamScanner

مثال اذا كانت $د(س) = \frac{1}{س}$ ارسم الشكل البياني للدالة ر(س) اذا كانت

(١) $ر(س) = |د(س)|$ (٢) $ر(س) = |د(س+١)| - ٢$

الحل



(١) ∵ $ر(س) = |د(س)|$

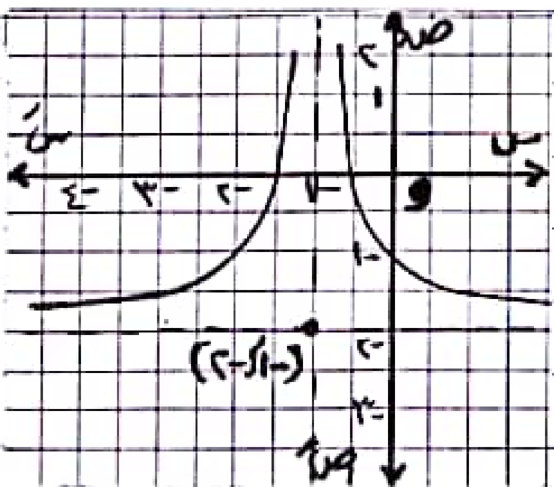
∴ $ر(س) = |\frac{1}{س}| = \frac{1}{|س|}$

∴ $ر(س) = \begin{cases} \frac{1}{س} & \text{عندما } س > ٠ \\ \frac{-1}{س} & \text{عندما } س < ٠ \end{cases}$

مجال الدالة = ح - {٠}

مدى الدالة =]٠، ∞[

الدالة زوجية - الدالة ليست اطارية - الدالة تزايدية في الفترة]-∞، ٠[وتناقصية في الفترة]٠، ∞[



(٢) ∵ $ر(س) = |د(س+١)| - ٢$

∴ $ر(س) = |\frac{1}{س+١}| - ٢ = \frac{1}{|س+١|} - ٢$

∴ $ر(س) = \begin{cases} \frac{1}{س+١} - ٢ & س > -١ \\ \frac{-1}{س+١} - ٢ & س < -١ \end{cases}$

∴ مجال الدالة = ح - {-١}

مدى الدالة =]-٢، ∞[

الدالة ليست زوجية وليست فردية وليست اطارية

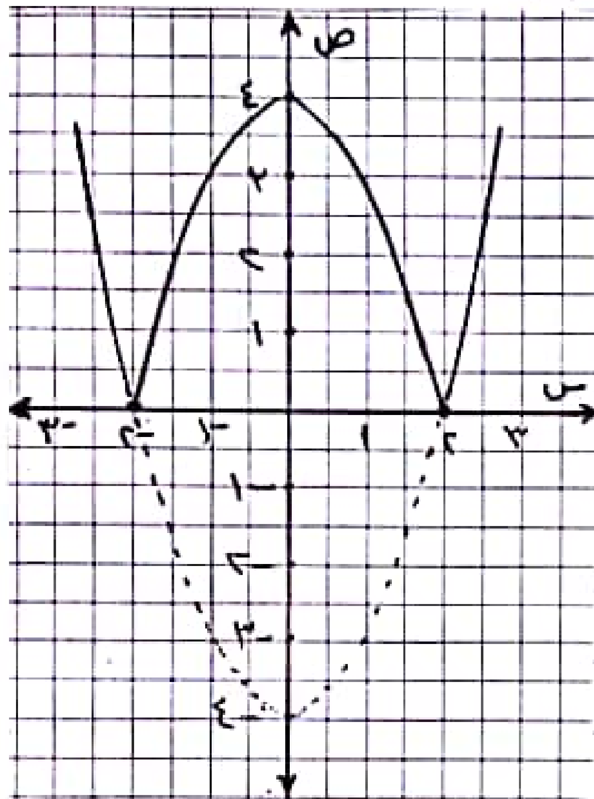
الدالة تزايدية في الفترة]-∞، -١[وتناقصية في الفترة]-١، ∞[

Scanned by CamScanner

مثال ٤ ارسم منحنى الدوال الآتية

(١) $د(س) = |٤ - س^٢|$ (٢) $د(س) = |س^٢ - ٢س - ٣|$ حيث $س \in [-١، ٤]$

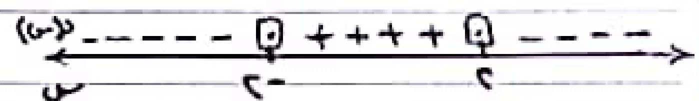




(١) ∵ $د(س) = |٤ - س^٢|$

نقوم ببحث اشارة المقدار $٤ - س^٢$

وذلك بوضع $٤ - س^٢ = ٠$ ∴ $س = \pm ٢$



∴ $د(س) = \begin{cases} ٤ - س^٢ & \text{عندما } س \in [-٢، ٢] \\ س^٢ - ٤ & \text{عندما } س \in ح - [-٢، ٢] \end{cases}$

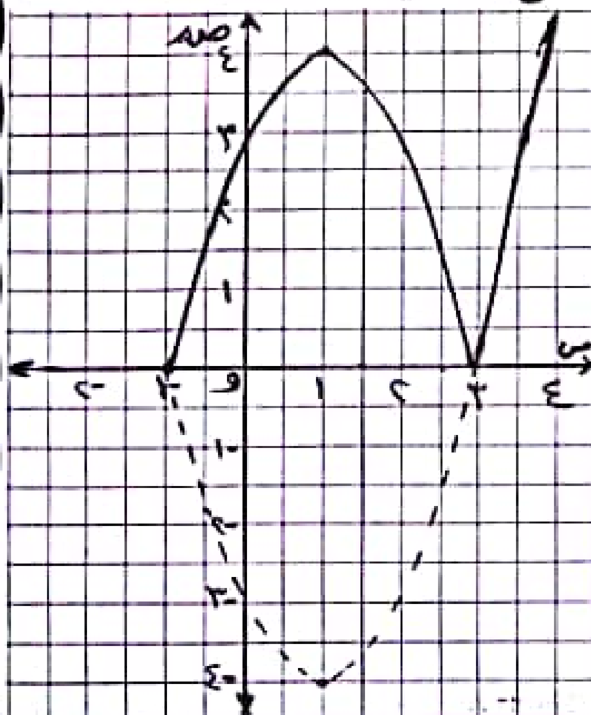
∴ مجال الدالة = ح

مدى الدالة = $[٠، \infty[$

الدالة زوجية وليست احادية

الدالة تناقصية فى الفترتين $]-\infty، -٢[$ ، $[٠، ٢[$

الدالة تزايدية فى الفترتين $]-٢، ٠[$ ، $]٢، \infty[$



(٢) ∵ $د(س) = |س^٢ - ٢س - ٣|$ لكل $س \in [-١، ٤]$

بوضع $س^٢ - ٢س - ٣ = ٠$ ⟸ $س = -١$ ، $س = ٣$



∴ $د(س) = \begin{cases} س^٢ - ٢س - ٣ & \text{لكل } س \in [٣، \infty[\\ \text{صفر} & \text{عندما } س = -١ \\ ٣ + ٢س - س^٢ & \text{لكل } س \in [-١، ٣] \end{cases}$

دراسة الدالة متروك للطالب

Scanned by CamScanner

النهايات

* مفاهيم هامة :-

(١) الكمية المعينة هي التي لها جواب محدد مثل $\frac{٥}{٣}$ ، $\frac{٤}{٤}$ ، .....

(٢) الكمية الغير معرفة :- هي كمية ليس لها معنى مثل

$\frac{٣}{صفر}$ لأنه لا يوجد عدد حقيقي إذا ضرب × صفر كان الناتج = ٣

وبصفة عامة الكمية غير المعرفة = $\frac{أ}{صفر}$ حيث أ ∈ ح - {٠}

(٣) الكمية الغير معينة :- هي الكمية التي ليس لها جواب محدد

مثل $\frac{صفر}{صفر}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، ∞ - ∞ ، صفر × ∞ ، (صفر)^{صفر} ، (∞)^{صفر} ، (١)$^{\infty}$

(٤) ∞ ± أ = ∞ ، - ∞ ± أ = - ∞

(٥) ∞ × أ =
- ∞ عندما أ > ٠
- - ∞ عندما أ < ٠
- كمية غير معينة عندما أ = ٠

(٦) - ∞ × أ =
- - ∞ عندما أ > ٠
- ∞ عندما أ < ٠
- كمية غير معينة عندما أ = ٠

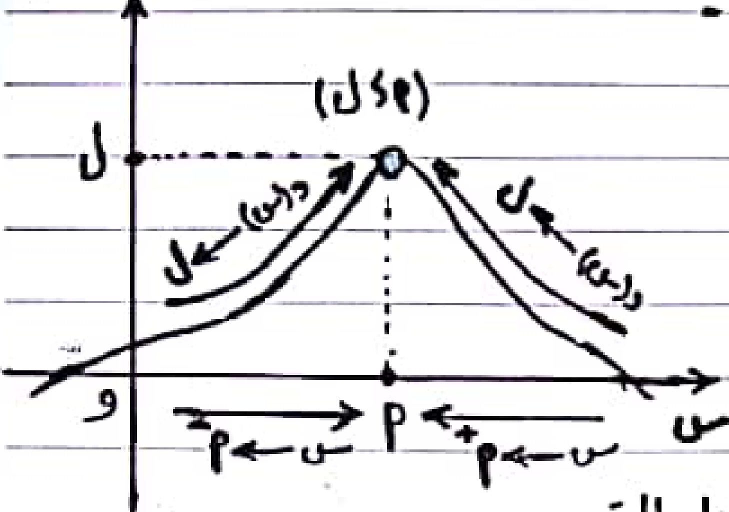
(٧) إذا كانت د(س) = $\frac{١}{س}$ فإن مجال الدالة = ح - {٠}

∴ د(٠) = $\frac{١}{صفر}$ كمية غير معرفة لذلك لا نستطيع

إيجاد قيمة الدالة عند س = ٠ ولكن يمكن إيجاد

قيمتها عندما تقترب س قرباً نهائياً من الصفر (س ← ٠)

Scanned by CamScanner



* النهاية اليمنى للدالة :-

من الملاحظ أن في الشكل المقابل يمثل الشكل البياني لمنحنى دالة ما
* كلما اقتربت قيمة س من أ من ناحية اليمين فإن قيمة الدالة تقترب من (ل) لذلك تسمى ل النهاية اليمنى للدالة عندما س تؤول الى أ وتكتب على الصورة $د(أ^+) = \lim_{س \leftarrow أ^+} د(س) = ل$

* النهاية اليسرى للدالة :-

ومن الملاحظ أيضاً كلما اقتربت س من أ من ناحية اليسار فإن قيمة الدالة تقترب من (ل) لذلك تسمى ل بالنهاية اليسرى للدالة عندما س ← $أ^-$ وتكتب على الصورة $د(أ^-) = \lim_{س \leftarrow أ^-} د(س) = ل$

* نهاية دالة عند نقطة :-

يكون للدالة د(س) نهاية عند نقطة أ إذا كانت

$د(أ^+) = د(أ^-) = ل$ وتكون ل هي قيمة النهاية عندما س = أ أو س ← أ وتكتب على الصورة

$\lim_{س \leftarrow أ} د(س) = ل$

Scanned by CamScanner

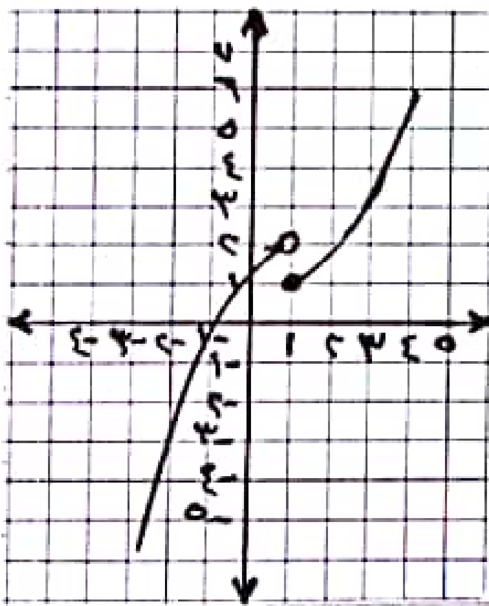
أما اذا كانت $د(\overset{+}{ٯ}) \neq د(\overset{-}{ٯ})$ فان

$\underset{س \leftarrow ٯ}{نها}$ د(س) تكون غير موجودة

ملاحظات هامة عند ايجاد نهاية الدالة د(س) عند نقطة (ٯ) نلاحظ الاتى

* لابد أن تكون الدالة معرفة فى جوار نقطة (ٯ) أى يكون للدالة مجال على يمين وعلى يسار (ٯ)
* نهاية دالة عند نقطة لا يلزم تعريفها عند هذه النقطة
* اذا كانت ٯ نقطة حدية فى مجال الدالة د(س) فإنه $\underset{س \leftarrow ٯ}{نها}$ د(س) تكون غير موجودة

* ايجاد نهاية دالة بيانياً :-



مثال

* فى الشكل المقابل نجد أن

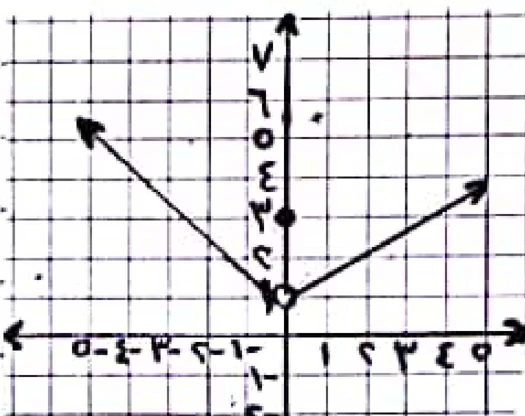
(١) د(١) = ١

(٢) $د(\overset{+}{١}) = ١$

(٣) $د(\overset{-}{١}) = ٢$

∴ $د(\overset{+}{١}) \neq د(\overset{-}{١})$

∴ $\underset{س \leftarrow ١}{نها}$ د(س) غير موجودة



* فى الشكل المقابل :-

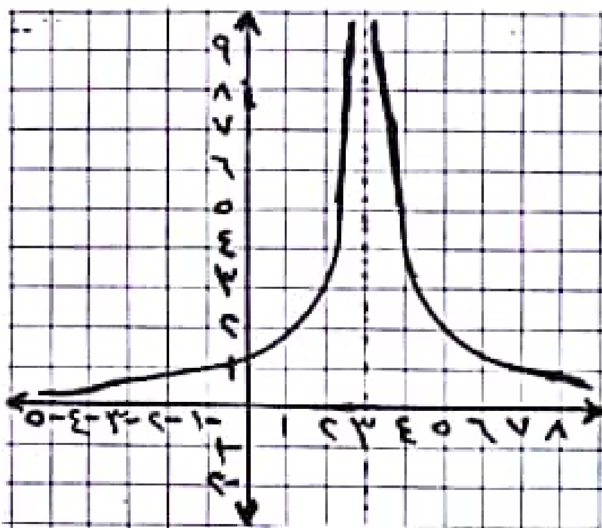
(١) د(٠) = ٣

$د(\overset{+}{٠}) = ١$

$د(\overset{-}{٠}) = ١$

∴ $\underset{س \leftarrow ٠}{نها}$ د(س) = ١

Scanned by CamScanner



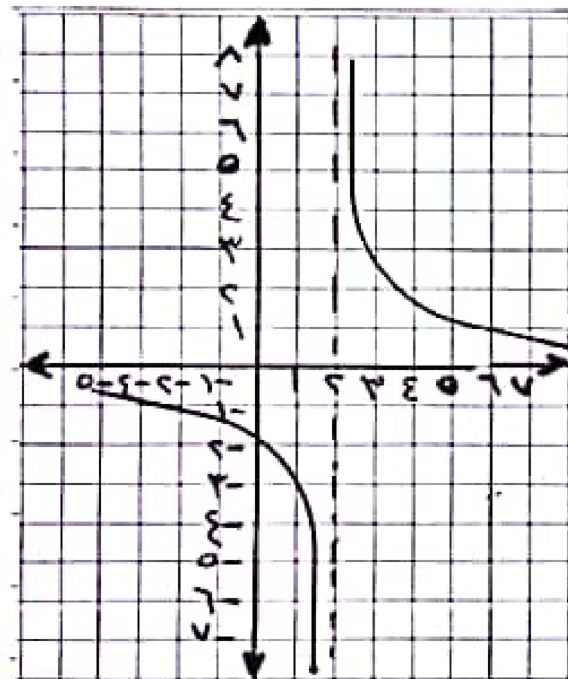
* في الشكل المقابل :

(١) د(٣) غير موجودة

(٢) د(٣^{+}) = ∞

(٣) د(٣^{-}) = ∞

(٤) ∴ نها د(س) = ∞ ،
س ← ٣



* في الشكل المقابل :

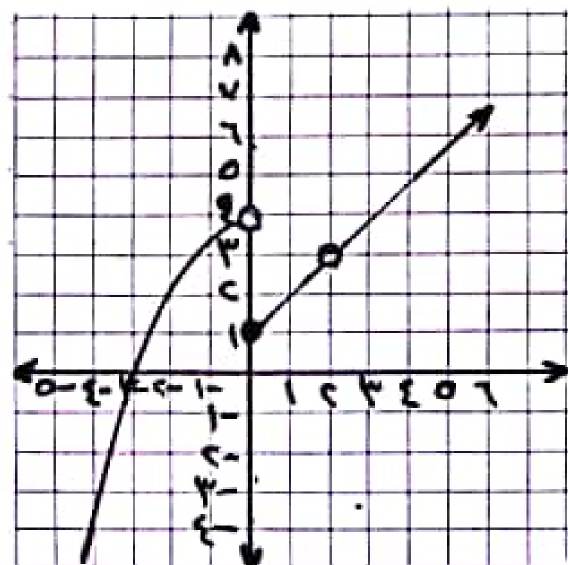
(١) د(٢) غير موجودة

(٢) د(٢^{+}) = ∞

(٣) د(٢^{-}) = $-\infty$

∴ د(٢^{+}) $\neq$ د(٢^{-})

∴ نها د(س) غير موجودة
س ← ٢



* في الشكل المقابل :

(١) د(٠) = ١

(٢) د(٠^{+}) = ١

(٣) د(٠^{-}) = ٤

(٤) ∴ د(٠^{+}) $\neq$ د(٠^{-})

∴ نها د(س) غير موجودة
س ← ٠

(٥) د(٢^{+}) = د(٢^{-}) = ٣

∴ نها د(س) = ٣
س ← ٢

Scanned by CamScanner

إيجاد نهاية دالة جبريا

نظرية (١) اذا كانت الدالة د(س) دالة كثيرة حدود معرفة في جوار نقطة (أ) فان:

$\lim_{س \to أ}$ د(س) = د(أ) (تعويض مباشر)

* نتيجة :-

اذا كانت د(س) دالة ثابتة حيث د(س) = ك فانه

$\lim_{س \to أ}$ د(س) = ك

مثال أوجد النهايات الاتية

(١) $\lim_{س \to ٢}$ (٣س + ١)

(٢) $\lim_{س \to ٢}$ (٣س + ١) حيث س ∈ [٢ ، ∞[

(٣) $\lim_{س \to -٣}$ (٥)

الحل

(١) ∵ د(س) = ٣س + ١ ∴ مجالها = ح

∴ الدالة معرفة في جوار س = ٢

∴ $\lim_{س \to ٢}$ (٣س + ١) = د(٢) = ٧

(٢) ∵ مجال الدالة د(س) = ٣س + ١ يساوي [٢ ، ∞[

∴ س = ٢ نقطة حدية ∴ $\lim_{س \to ٢}$ (٣س + ١) = غير موجودة

(٣) $\lim_{س \to -٣}$ (٥) = ٥ (دالة ثابتة)

Scanned by CamScanner

نظرية (٢) اذا كانت د ، ر دالتين في المتغير س وكان نهـا (س ← أ) د(س) = ل

و نهـا (س ← أ) ر(س) = م فإن :

(١) نهـا (س ← أ) [د(س) ± ر(س)] = نهـا (س ← أ) د(س) ± نهـا (س ← أ) ر(س) = ل ± م

أي أن نهاية مجموع دالتين = المجموع الجبري لنهايتيهما

(٢) نهـا (س ← أ) [د(س) × ر(س)] = نهـا (س ← أ) د(س) × نهـا (س ← أ) ر(س) = ل × م

اي أن نهاية حاصل ضرب دالتين = حاصل ضرب النهايتين

(٣) اذا كان ك عدد ثابت فإن :

نهـا (س ← أ) ك د(س) = ك نهـا (س ← أ) د(س) = ك × ل

(٤) نهـا (س ← أ) د(س) / ر(س) = ل / م بشرط م ≠ ٠ .

(٥) نهـا (س ← أ) [د(س)]^ن = [نهـا (س ← أ) د(س)]^ن = (ل)^ن

ملاحظة

اذا كانت نهـا (س ← أ) د(س) = كمية غير معرفة

فإن نهاية الدالة تكون غير معرفة وفي هذه الحالة نلجأ إلى الطريقة البيانية لتحديد ما إذا كانت

نهـا (س ← أ) د(س) = ∞ أو نهـا (س ← أ) د(س) غير موجودة

Scanned by CamScanner

* ما يراعى عند ايجاد نهاية دالة :-

عند ايجاد $\lim_{س \to ا}$ د(س) يجب أن نراعي الآتي :-

(١) معرفة مجال الدالة د(س) (ولو بمجرد النظر) فاذا كانت (ا) نقطة حدية في مجال الدالة فان :
$\lim_{س \to ا}$ د(س) تكون غير موجودة

(٢) اذا كانت الدالة معرفة في جوار (ا) نستخدم التعويض المباشر في قاعدة الدالة فاذا كان :-

* الناتج كمية معينة ← تكون هذه الكمية هي نهاية الدالة

* الناتج كمية غير معرفة ← فان نهاية الدالة تكون غير معرفة ونلجأ الى الحل البياني في هذه الحالة لمعرفة ما إذا كانت $\lim_{س \to ا}$ د(س) = ∞ أو $\lim_{س \to ا}$ د(س) غير موجودة

* الناتج كمية غير معينة فان الدالة يكون لها نهاية ولكن لابد من اختزال العامل الصفري باحدى الطرق المناسبة (تحليل - قسمة - ضرب في المرافق - ......)

مثال

أوجد النهايات الآتية

(١) $\lim_{س \to ٠} \frac{س - ٣}{س + ٣}$ (٢) $\lim_{س \to ٢}$ (-٥)

(٣) $\lim_{س \to ٠} \frac{س^٢ - س}{س}$ (٤) $\lim_{س \to ٠} \frac{١}{س^٢}$

Scanned by CamScanner

الحل

(١) ∵ $\lim_{س \to ٠} \frac{س - ٣}{س + ٣} = \frac{٠ - ٣}{٠ + ٣} = -١$ (كمية معينة)

(٢) ∵ $\lim_{س \to ٢} (-٥) = -٥$ (نهاية العدد الثابت = العدد الثابت)

(٣) ∵ $\lim_{س \to ٠} \frac{س^٢ - س}{س} = \frac{٠}{٠} = \frac{صفر}{صفر}$ كمية غير معينة

∴ $\lim_{س \to ٠} \frac{س(س - ١)}{س} = \lim_{س \to ٠} (س - ١) = -١$

(٤) ∵ $\lim_{س \to ٠} \frac{١}{س^٢} = \frac{١}{صفر}$ كمية غير معرفة أى أن النهاية

غير معرفة لذلك نلجأ الى الحل البيانى

ومن الشكل البيانى لمنحنى الداله نجد أن

$د(٠^+) = \lim_{س \to ٠^+} \frac{١}{س^٢} = \infty$ ①

$د(٠^-) = \lim_{س \to ٠^-} \frac{١}{س^٢} = \infty$ ②

∴ من ① ، ② ينتج أن

$\lim_{س \to ٠} \frac{١}{س^٢} = \infty$

مثال

أوجد النهايات الاتية

(١) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٢س}{س^٢ - س - ٢}$ (٢) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ + ٤س + ٣}{س^٢ - ٩}$

الحل

(١) ∵ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٢س}{س^٢ - س - ٢} = \frac{٤ - ٤}{٤ - ٢ - ٢} = \frac{صفر}{صفر}$ كمية غير معينة

Scanned by CamScanner

باستخدام التحليل ينتج

$\lim_{س \to ٢} د(س) = \lim_{س \to ٢} \frac{س(س-٢)}{(س-٢)(س+١)}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{س}{س+١} = \frac{٢}{٣}$

(٤) ∵ $\lim_{س \to -٣} \frac{س^٢+٤س+٣}{س^٢-٩} = \lim_{س \to -٣} \frac{(س+٣)(س+١)}{(س+٣)(س-٣)}$

∴ $\lim_{س \to -٣} د(س) = \lim_{س \to -٣} \frac{س+١}{س-٣} = \frac{-٢}{-٦} = \frac{١}{٣}$

مثال أوجد النهايات الآتية :

(١) $\lim_{س \to -٢} \frac{س^٢+٤س+٤}{س^٣+س^٢-٨س-١٢}$ (٢) $\lim_{س \to ٩} \frac{س+٧\sqrt{س}-١٢}{س-٩}$

الحل

(١) البسط مقدار ثلاثي بسيط سهل التحليل = (س+٢)(س+٢)

اما المقام نستخدم القسمة التركيبية لتحليله كالاتى

① نرتب المقدار ترتيباً تنازلياً $س^٣+س^٢-٨س-١٢$

-١٢	-٨	١	١	
١٢	٢	-٢	↓	-٢
•	-٦	-١	١	

∵ س ← -٢

∴ العامل الصفري = (س+٢)

• هو باقي القسمة ، -٦ الحد المطلق ، -١ معامل س ، ١ معامل $س^٢$

∴ $س^٣+س^٢-٨س-١٢ = (س+٢)(س^٢-س-٦)$

∴ $\lim_{س \to -٢} د(س) = \lim_{س \to -٢} \frac{(س+٢)(س+٢)}{(س+٢)(س^٢-س-٦)}$

$= \lim_{س \to -٢} \frac{س+٢}{س^٢-س-٦} = \frac{صفر}{٤+٢-٦} = \frac{صفر}{صفر}$ كمية غير معينة

∴ بالتحليل مرة أخرى

∴ $\underset{\text{س}\to -2}{\text{نها}}\ \text{د(س)} = \underset{\text{س}\to -2}{\text{نها}}\ \frac{\text{س}+2}{(\text{س}+2)(\text{س}-3)} = \frac{1}{-5} = \frac{-1}{5}$

(٢) ∵ $\underset{\text{س}\to 9}{\text{نها}}\ \frac{\text{س}+\sqrt{\text{س}}-12}{\text{س}-9} = \underset{\text{س}\to 9}{\text{نها}}\ \frac{\text{س}-9+\sqrt{\text{س}}-3}{\text{س}-9}$

$= \underset{\text{س}\to 9}{\text{نها}} \left[\frac{\text{س}-9}{\text{س}-9} + \frac{\sqrt{\text{س}}-3}{(\sqrt{\text{س}}-3)(\sqrt{\text{س}}+3)} \right]$

$= \underset{\text{س}\to 9}{\text{نها}} \left[1 + \frac{1}{\sqrt{\text{س}}+3} \right] = 1 + \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$

مثال

أوجد النهايات الآتية :-

(١) $\underset{\text{س}\to -1}{\text{نها}}\ \frac{\text{س}+1}{\sqrt{\text{س}+5}-2}$ (٢) $\underset{\text{س}\to 5}{\text{نها}}\ \frac{\sqrt{\text{س}-1}-2}{\text{س}-5}$

الحل

(١) بالضرب × مرافق المقام بسطاً ومقاماً

∴ $\underset{\text{س}\to -1}{\text{نها}}\ \text{د(س)} = \underset{\text{س}\to -1}{\text{نها}} \left(\frac{\text{س}+1}{\sqrt{\text{س}+5}-2} \times \frac{\sqrt{\text{س}+5}+2}{\sqrt{\text{س}+5}+2} \right)$

$= \underset{\text{س}\to -1}{\text{نها}} \left(\frac{(\text{س}+1)(\sqrt{\text{س}+5}+2)}{\text{س}+5-4} \right)$

$= \underset{\text{س}\to -1}{\text{نها}} \left(\sqrt{\text{س}+5}+2 \right) = 2+2 = 4$

(٢) بالضرب × مرافق البسط بسطاً ومقاماً

∴ $\underset{\text{س}\to 5}{\text{نها}}\ \text{د(س)} = \underset{\text{س}\to 5}{\text{نها}} \left[\frac{\sqrt{\text{س}-1}-2}{\text{س}-5} \times \frac{\sqrt{\text{س}-1}+2}{\sqrt{\text{س}-1}+2} \right]$

$= \underset{\text{س}\to 5}{\text{نها}} \left[\frac{\text{س}-5}{(\text{س}-5)(\sqrt{\text{س}-1}+2)} \right] = \frac{1}{4}$

Scanned by CamScanner

مثال أوجد النهايات الآتية

(1) $\lim\limits_{س \to 5} \sqrt{س-1}$ (2) $\lim\limits_{س \to 1} \sqrt{س-1}$

(3) $\lim\limits_{س \to 1} \frac{س^2+2س-3}{(س-1)^2}$ (4) $\lim\limits_{س \to 2} \sqrt{4-س^2}$

الحل

(1) ∵ مجال الدالة $د(س) = \sqrt{س-1}$ هو $[1 ، \infty[$

∴ $س = 5$ ليست نقطة حدية في مجال الدالة

∴ $\lim\limits_{س \to 5} د(س) = \lim\limits_{س \to 5} \sqrt{س-1} = \sqrt{4} = 2$

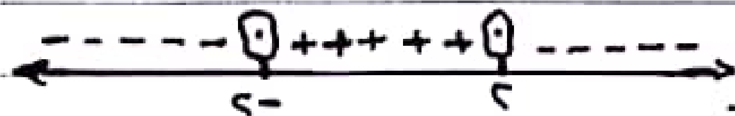
(2) ∵ مجال الدالة $د(س) = \sqrt{س-1}$ هو $[1 ، \infty[$

∴ $س = 1$ نقطة حدية ∴ $\lim\limits_{س \to 1} \sqrt{س-1}$ غير موجودة

(3) ∵ $\lim\limits_{س \to 1} \frac{س^2+2س-3}{(س-1)^2} = \lim\limits_{س \to 1} \frac{(س+3)(س-1)}{(س-1)^2}$

$= \lim\limits_{س \to 1} \frac{س+3}{س-1} = \frac{4}{صفر}$ ∴ النهاية غير موجودة

(4) إيجاد مجال الدالة



∴ مجال الدالة $د(س) = \sqrt{4-س^2}$

$= [-2 ، 2]$

∴ $س = 2$ نقطة حدية في مجال الدالة

∴ $\lim\limits_{س \to 2} \sqrt{4-س^2}$ غير موجودة

Scanned by CamScanner

يمكن أن نقول

اذا كانت $\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ه(س)}}{\text{س} - \text{أ}} = \text{ل}$

حيث ه(س) دالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية $(\text{س}^2 + \text{ب س} + \text{جـ})$

(1) ه(أ) = صفر

(2) $\text{ه(س)} = (\text{س} - \text{أ})(\text{س} - \text{أ} + \text{ل})$

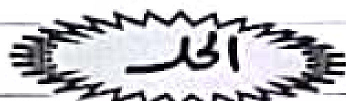
أي أن دالة البسط = العامل الصفري × (العامل الصفري + النهاية)

مثال

(1) اذا كانت $\underset{\text{س} \to 2}{\text{نهـا}} \frac{\text{أ}}{\text{س} + 1} = 4$ فإن أ = ...

(2) اذا كانت $\underset{\text{س} \to 2}{\text{نهـا}} \frac{\text{د(س)} - 5}{\text{س} - 2} = 1$ فإن $\underset{\text{س} \to 2}{\text{نهـا}} \text{د(س)} = ...$

(3) اذا كانت $\underset{\text{س} \to 1}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^2 + \text{أ س} + \text{ب}}{\text{س} - 1} = 5$ فإن أ = ... ، ب = ...



(1) ∵ $\underset{\text{س} \to 2}{\text{نهـا}} \frac{\text{أ}}{\text{س} + 1} = 4$ ⟸ ∴ د(2) = 4 ∴ $\frac{\text{أ}}{3} = 4$ ⟸ أ = 12

(2) ∵ $\underset{\text{س} \to 2}{\text{نهـا}} \frac{\text{د(س)} - 5}{\text{س} - 2} = 1$ لها نهاية ∴ $\text{د(2)} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

∴ د(س) − 5 = 0 منها د(س) = 5 ⟸ $\underset{\text{س} \to 2}{\text{نهـا}} \text{د(س)} = 5$

(3) ∵ $\underset{\text{س} \to 1}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^2 + \text{أ س} + \text{ب}}{\text{س} - 1} = 5$

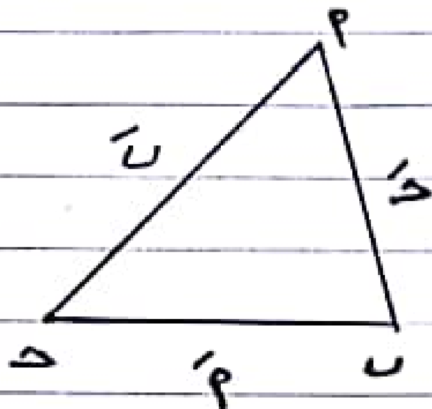
∴ $\text{س}^2 + \text{أ س} + \text{ب} = (\text{س} - 1)(\text{س} - 1 + 5)$

∴ $\text{س}^2 + \text{أ س} + \text{ب} = (\text{س} - 1)(\text{س} + 4)$

∴ $\text{س}^2 + \text{أ س} + \text{ب} = \text{س}^2 + 3\text{س} - 4$ وبمقارنة المعاملات

أ = 3 ، ب = −4

قانون الجيب



* قاعدة الجيب :-

في أي مثلث تتناسب أطوال الأضلاع مع جيوب الزوايا المقابلة لها .

أي أنه في Δ أ ب جـ يكون

$$\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـَ}}{\text{جا جـ}}$$

مثال

في Δ أ ب جـ إذا كان أَ = ١٠ سم ، ق(أ̂) = ٣٠° ، ق(ب̂) = ٤٥° أوجد كلاً من بَ ، جـَ وكذلك مساحة Δ أ ب جـ

الحل

∵ أَ = ١٠ سم ، ق(أ̂) = ٣٠° ، ق(ب̂) = ٤٥° ∴ ق(جـ̂) = ١٠٥°

∵ $\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـَ}}{\text{جا جـ}}$ ∴ $\frac{١٠}{\text{جا } ٣٠°} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا } ٤٥°} = \frac{\text{جـَ}}{\text{جا } ١٠٥°}$

ومنها بَ = $\frac{١٠ \text{ جا } ٤٥°}{\text{جا } ٣٠°}$ ومنها بَ = ١٤,١ سم

∴ جـَ = $\frac{١٠ \text{ جا } ١٠٥°}{\text{جا } ٣٠°}$ ومنها جـَ ≃ ١٩,٣ سم

∵ مساحة Δ أ ب جـ = نصف حاصل ضرب أي ضلعين في جيب الزاوية المحصورة بينهما

∴ مساحة Δ أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ بَ جـَ جا أ

= $\frac{1}{2}$ × ١٤,١ × ١٩,٣ × جا ٣٠°

∴ مساحة Δ أ ب جـ = ٦٨ سم² تقريباً

Scanned by CamScanner

مثال إذا كان Δ س ص ع محيطه ١٨ سم وكان $\frac{1}{2}$ جا س = $\frac{1}{3}$ جا ص = $\frac{1}{4}$ جا ع أوجد أطوال أضلاع المثلث

الحل

∵ $\frac{\text{جا س}}{\text{٢}} = \frac{\text{جا ص}}{\text{٣}} = \frac{\text{جا ع}}{\text{٤}}$ منها $\frac{\text{٢}}{\text{جا س}} = \frac{\text{٣}}{\text{جا ص}} = \frac{\text{٤}}{\text{جا ع}}$

∴ سَ : صَ : عَ = ٢ : ٣ : ٤

∴ سَ = ٢م ، صَ = ٣م ، عَ = ٤م ← ①

∵ محيط Δ س ص ع = ١٨ سم ∴ ٩م = ١٨ ← ∴ م = ٢

∴ سَ = ٤ سم ، صَ = ٦ سم ، عَ = ٨ سم

مثال أكمل ما يأتي :-

(١) في أي مثلث أ ب حـ يكون $\frac{\text{أَ}}{\text{أَ + بَ}} = \frac{\text{جا أ}}{\text{....}}$

(٢) في أي مثلث أ ب حـ يكون $\frac{\text{جا(أ + ب)}}{\text{جا أ + جا ب}} =$ ....

الحل

(١) ∵ في Δ أ ب حـ يكون $\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حَ}}{\text{جا حـ}}$

منها $\frac{\text{أَ}}{\text{بَ}} = \frac{\text{جا أ}}{\text{جا ب}}$ باستخدام خواص النسبة ينتج $\frac{\text{أَ}}{\text{أَ + بَ}} = \frac{\text{جا أ}}{\text{جا أ + جا ب}}$

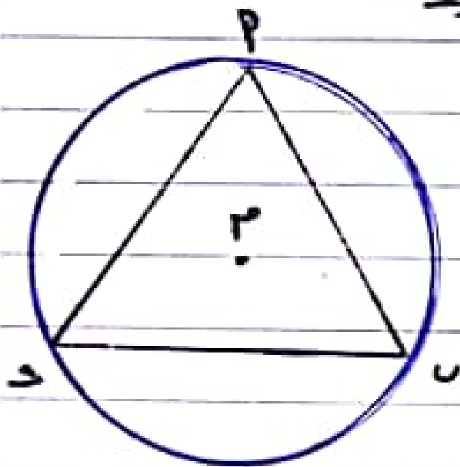
(٢) ∵ $\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حَ}}{\text{جا حـ}}$ ∵ ق(حـ^) = ١٨٠° − (أ + ب)

∴ $\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حَ}}{\text{جا(أ + ب)}}$ منها $\frac{\text{أَ + بَ}}{\text{جا أ + جا ب}} = \frac{\text{حَ}}{\text{جا(أ + ب)}}$

∴ $\frac{\text{جا(أ + ب)}}{\text{جا أ + جا ب}} = \frac{\text{حَ}}{\text{أَ + بَ}}$

Scanned by CamScanner

تمرين مشهور



في أي مثلث أ ب جـ يكون

$$\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{جـ}{جا جـ} = 2نق$$

حيث نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث أ ب جـ (المارة برؤوس △ أ ب جـ)

مثال

أكمل ما يأتي :

(1) إذا كان نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث أ ب جـ فإن $\frac{أ}{2جا أ}$ = ...

(2) إذا كان طول ضلع في مثلث ما = 12سم وقياس الزاوية المقابلة لهذا الضلع = 55° فإن محيط الدائرة المارة برؤوسه يساوي.....

الحل

(1) ∵ $\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{جـ}{جا جـ} = 2نق$ منها $\frac{أ}{جا أ} = 2نق$

∴ $\frac{أ}{2جا أ} = نق$

(2) بفرض أن أ = 12سم ، ق(∠أ) = 55°

∵ $\frac{أ}{جا أ} = 2نق$ ∴ $نق = \frac{6}{جا 55°} \simeq 7{,}3$ سم

∴ محيط الدائرة = 2 ط نق

≃ 46 سم

Scanned by CamScanner

مثال
أ ب جـ مثلث مساحة سطحه ٤٥٠ سم²
ق(ب̂) = ٨٢° ، ق(جـ̂) = ٥٦° فما أَ

الحل

∵ ق(ب̂) = ٨٢° ، ق(جـ̂) = ٥٦° ∴ ق(أ̂) = ٤٢°

∵ أَ / جا أ = بَ / جا ب = جـَ / جا جـ ∴ أَ / جا ٤٢° = بَ / جا ٨٢° = جـَ / جا ٥٦° (١)

∵ مساحة سطح المثلث أ ب جـ = ½ أَ بَ جا جـ

∴ ٤٥٠ = ½ أَ × بَ جا ٥٦° ← (٢)

من (١) ينتج أن بَ = أَ جا ٨٢° / جا ٤٢° بالتعويض في (١)

∴ ٤٥٠ = ½ أَ × أَ جا ٨٢° / جا ٤٢° × جا ٥٦° منها أَ = ٢٧٫١ سم

مثال
إذا كان محيط Δ أ ب جـ = ٤٠ سم ، ق(أ̂) = ٤٤°
ق(ب̂) = ٦٦° أوجد أطوال أضلاع Δ أ ب جـ

الحل

∵ ق(أ̂) = ٤٤° ، ق(ب̂) = ٦٦° ∴ ق(جـ̂) = ٧٠°

∵ أَ / جا أ = بَ / جا ب = جـَ / جا جـ منها (أَ + بَ + جـَ) / (جا ٤٤° + جا ٦٦° + جا ٧٠°) = كل نسبة

٤٠ / ٢٫٥٥ ≃ ١٥٫٧ ≃ كل نسبة ∴ منها أَ = ١٥٫٧ جا ٤٤° ≃ ١٠٫٩ سم

∴ بَ = ١٥٫٧ جا ٦٦° ≃ ١٤٫٣ سم

∴ جـَ = ١٥٫٧ جا ٧٠ ≃ ١٤٫٨ سم

Scanned by CamScanner

مثال أ ب ح مثلث فيه ق($\hat{\text{أ}}$) = ٦٠° ، ق($\hat{\text{ب}}$) = ٤٥°
وكان أ + ب = ($\sqrt{٦}$ + ٢) سم أوجد أ ، ب

الحل

∵ ق($\hat{\text{أ}}$) = ٦٠° ، ق($\hat{\text{ب}}$) = ٤٥° فإن ق($\hat{\text{ح}}$) = ٧٥°

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{حا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{حا ب}} = \frac{\text{ح}}{\text{حا ح}}$ ∴ $\frac{\text{أ}}{\text{حا } ٦٠°} = \frac{\text{ب}}{\text{حا } ٤٥°}$ من خواص

التناسب ينتج $\frac{\text{أ} + \text{ب}}{\text{حا } ٦٠° + \text{حا } ٤٥°}$ = كل نسبة ⇐ ∴ كل نسبة = ٢$\sqrt{٢}$

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{حا } ٦٠°}$ = ٢$\sqrt{٢}$ منها أ = $\sqrt{٦}$ سم

$\frac{\text{ب}}{\text{حا } ٤٥°}$ = ٢$\sqrt{٢}$ منها ب = ٢ سم

مثال في أي مثلث أ ب ح أثبت أن

(١) $\frac{٣\text{أ} - ٤\text{ب}}{٣\text{حا أ} - ٤\text{حا ب}}$ = ٢ نق حيث نق نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث

(٢) مساحة المثلث = $\frac{\text{أ}^{٢}\ \text{حا ب حا ح}}{٢\text{حا أ}} = \frac{\text{أ ب ح}}{٤\ \text{نق}}$

الحل

∵ $\frac{\text{أ}}{\text{حا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{حا ب}} = \frac{\text{ح}}{\text{حا ح}}$ = ٢ نق بضرب حدي النسبة الأولى × ٣
وحدي النسبة الثانية × −٤

∴ $\frac{٣\text{أ}}{٣\text{حا أ}} = \frac{-٤\text{ب}}{-٤\text{حا ب}}$ = ٢ نق باستخدام خواص التناسب

∴ $\frac{٣\text{أ} - ٤\text{ب}}{٣\text{حا أ} - ٤\text{حا ب}}$ = ٢ نق ← أولاً

(٢) ∵ مساحة △ أ ب ح = $\frac{١}{٢}$ أ ب حا ح ← ①

Scanned by CamScanner

$\because \frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب}$ منها $ب = \frac{أ\ جا ب}{جا أ}$ بالتعويض في ①

$\therefore$ مساحة Δ أ ب جـ $= \frac{1}{2}$ أ $\times \frac{أ\ جا ب}{جا أ} \times$ جا جـ $= \frac{أ^2\ جا ب\ جا جـ}{2\ جا أ} =$ الايسر

(٣) $\because$ مساحة Δ أ ب جـ $= \frac{1}{2}$ أ ب جا جـ ← ①

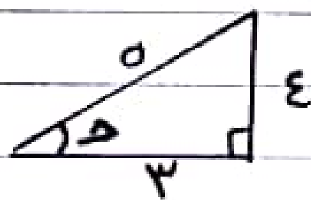
$\because \frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{جـ}{جا جـ} = 2$ نق منها جا جـ $= \frac{جـ}{2\ نق}$

بالتعويض في ① ينتج مساحة Δ أ ب جـ $= \frac{أ\ ب\ جـ}{4\ نق}$

مثال

أ ب جـ مثلث منفرج الزاوية في أ فيه ب $= 5$ سم ، ظا جـ $= \frac{4}{3}$ ، ق($\hat{ب}$) $= 30°$ اوجد لاقرب سم كلاً من أ ، جـ ، مساحة Δ أ ب جـ

الحل



$\because \frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{جـ}{جا جـ}$

$\frac{أ}{جا أ} = \frac{5}{جا 30°} = \frac{جـ}{\frac{4}{5}}$ $\therefore \frac{أ}{جا أ} = 10 = \frac{5\ جـ}{4}$

$\therefore$ جـ $= 8$ سم ← ①

$\because \Delta$ أ ب جـ منفرج الزاوية في أ ⟸ $\therefore \hat{جـ}$ حادة حيث ظا جـ $= \frac{4}{3}$

$\therefore$ ق($\hat{جـ}$) $= 53° \ 7' \ 48''$ ⟸ $\therefore$ ق($\hat{أ}$) $= 180 - (ب + جـ)$

$\therefore$ ق($\hat{أ}$) $= 96° \ 52' \ 12''$

$\therefore \frac{أ}{جا (96.87)} = 10$ منها أ $= 10$ سم ← ②

$\therefore$ مساحة Δ أ ب جـ $= \frac{1}{2}$ أ جـ جا ب $= \frac{1}{2} \times 10 \times 8 \times \frac{1}{2}$

$= 20$ سم^2

كيفية طباعة صفحات معينة من ملف معين

مثلا ازاى نطبع الصفحات من صفحة 4 الى صفحة 9

